Charged particle motion in electromagnetic fields

מחוק לורנץ מקבלים:

$$F = qE + q(V \times B)$$

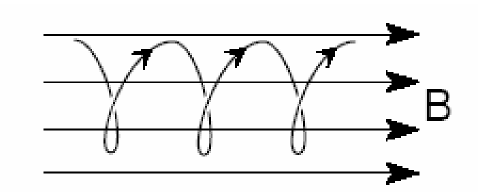
התאוצה:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{q}{m}(E + V \times B)$$

התאוצות בכיוונים השונים:

$$\begin{aligned} \frac{dv_z}{dt} &= 0 \\ \frac{d\mathbf{v}_\perp}{dt} &= \frac{qB}{m}\mathbf{v}_\perp \times \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

המהירויות:



$$\begin{aligned} v_x &= v_\perp \cos(\omega_g t + \phi) \\ v_y &= v_\perp \sin(\omega_g t + \phi) \\ v_z &= v_{||} \end{aligned}$$

מיקום מרכז המעגל:

$$\begin{aligned} x - x_0 &= \frac{v_\perp}{\omega_g}\sin(\omega_g t + \phi) \\ y - y_0 &= -\frac{v_\perp}{\omega_g}\cos(\omega_g t + \phi) \\ z - z_0 &= v_{||} t \end{aligned}$$

תדירות הפרסציה:

$$\omega_g = qB/m.$$

רדיוס המעגל:

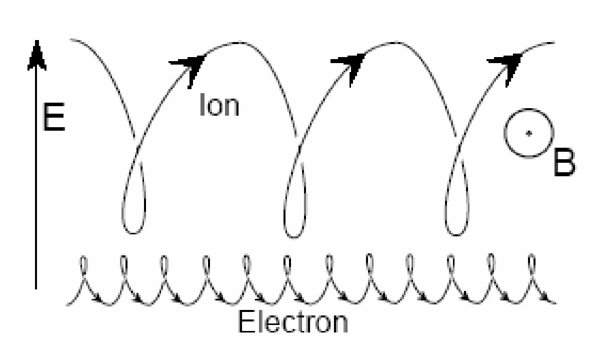
$$r_g = \frac{v_\perp}{\omega_g} = \frac{mv_\perp}{|q|B}.$$

היחס בין המהירות בכיוון השדה למהירות בניצב לו:

$$\alpha = \tanh^{-1}\frac{v_\perp}{v_{||}}$$

השפעת כוחות נוספים על התנועה הסיבובית:

סחיפה כתוצאה משדה חשמלי ניצב:



במקרה זה כח לורנץ ניתן על ידי :

$$\frac{d\mathbf{v}_\perp}{dt} = \frac{q\mathbf{E}_\perp}{m} + \frac{q}{m}\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

נציב ב v שתי מהירויות שונות.

$$\mathbf{v}_\perp = \mathbf{u} + \mathbf{w}$$

נציב במשוואת הכוחות :

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{q\mathbf{E}_\perp}{m} + \frac{q}{m}\mathbf{v}_E \times \mathbf{B} + \frac{q}{m}\mathbf{u} \times \mathbf{B}$$

תנועת החלקיק תהיה כזו שתבטל לחלוטין את השפעת השדה החשמלי :

$$\frac{q\mathbf{E}_\perp}{m} + \frac{q}{m}\mathbf{v}_E \times \mathbf{B} = 0$$

נראה שהצבת הביטוי הנ"ל מקיימת את התנאי הנדרש:

$$\mathbf{v}_E = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}$$

באופן כללי יותר ניתן להציב כל כח הפועל על החלקיק ולקבל את הסחיפה הנגרמת מהשפעתו.

$$\boxed{\mathbf{v}_F = \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{B}}{qB^2}}$$

Polarization Drift

השפעת שינויים בשדה החשמלי:

נציב את כל אחד מחלקי כח לורנץ בביטוי הקודם:

$$\frac{m}{qB^2}\frac{dV}{dt}\times B=\frac{q}{qB^2}\left(E\times B\right)+\frac{q}{qB^2}\left(V\times B\right)\times B$$

ונקבל :

$$\frac{m}{qB^2}\frac{d\mathbf{v}}{dt}\times\mathbf{B}=\mathbf{E}\times\frac{\mathbf{B}}{B^2}+\mathbf{v}_\perp$$

עבור שדות אחידים מתקיים: $E=-v\times B$

מכאן נקבל את מהירות הסחיפה :

כאשר w היא הסחיפה מן המקרה של השדה הניצב והאחיד מקודם.

$$\mathbf{v}_D=\mathbf{w}_E+\frac{1}{\omega_g B}\frac{d\mathbf{E}_\perp}{dt}$$

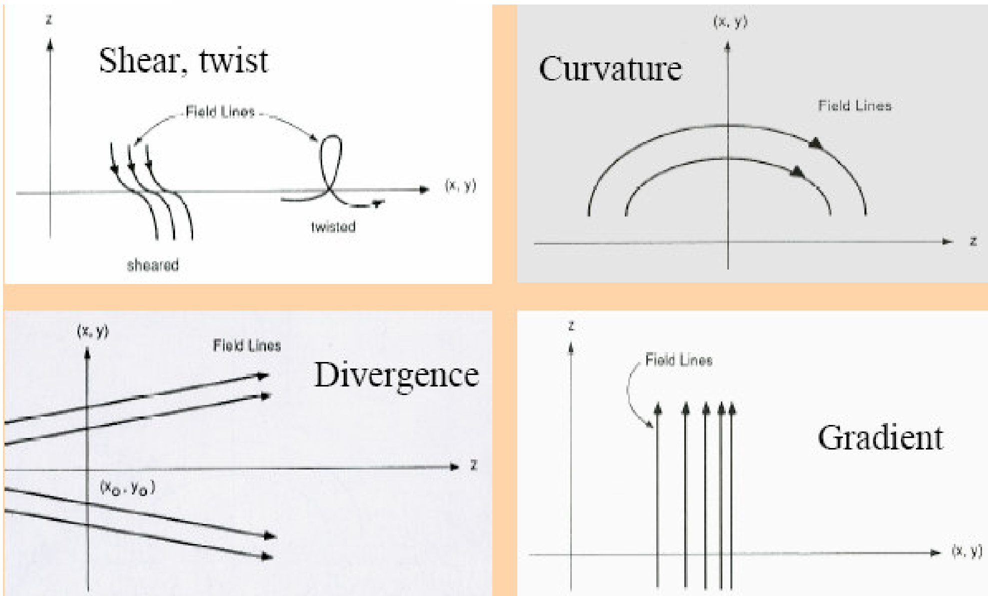
כך שהתרומה של השינוי השדה היא :

$$\mathbf{v}_P=\frac{1}{\omega_g B}\frac{d\mathbf{E}_\perp}{dt}$$

Magnetic Gradient Drift

ניקח את B להיות כזה המשתנה במרחב :

$$\mathbf{B}=\mathbf{B}_0+\mathbf{r}\cdot\nabla\mathbf{B}_0$$



נציב את הביטוי במשוואת הכוחות:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{q}{m}(\mathbf{v}\times\mathbf{B}_0)+\frac{q}{m}\left(\mathbf{v}\times(\mathbf{r}\cdot\nabla)\,\mathbf{B}_0\right)$$

נפריד את המהירות למהירות סיבובית v_g ולמהירות קווית – מהגרדיאנט v_∇:

נציב : $\mathbf{v}=\mathbf{v}_g+\mathbf{v}_\nabla$

כך ש: $m\frac{d\mathbf{v}_g}{dt}=\frac{\mathbf{v}_g}{c}\times\mathbf{B}_0$

$$\frac{d\mathbf{v}_\nabla}{dt}=\frac{q}{m}(\mathbf{v}_\nabla\times\mathbf{B}_0)+\frac{q}{m}\left(\mathbf{v}_g\times(\mathbf{r}\cdot\nabla)\,\mathbf{B}_0\right)$$

במקרה שמהירות הסחיפה קבועה נקבל (dv/dt=0) ובכן $\frac{d\mathbf{v}_\nabla}{dt}\times\mathbf{B}_0=0$ ומכאן נובע:

$$\mathbf{v}_\nabla=\frac{1}{B^2}\left\langle\left(\mathbf{v}_g\times(\mathbf{r}\cdot\nabla)\,\mathbf{B}_0\right)\times\mathbf{B}_0\right\rangle$$

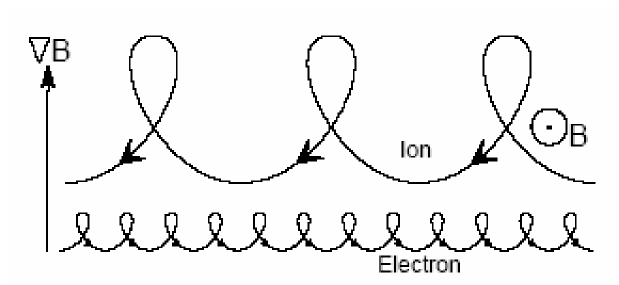
במקרה החד מימדי כאשר $\mathbf{B}_0=B_0(x)_z$:

$$\mathbf{v}_\nabla = \frac{1}{B_0}\left\langle \mathbf{v}_g x \frac{dB_0}{dx} \right\rangle$$

ובמקרה הכללי:

$$\mathbf{v}_\nabla = \frac{mv_\perp^2}{2qB^3}\left(\mathbf{B} \times \nabla B\right)$$

אופן התנועה ביחס לשדות:



$$\begin{aligned}
\text{Electric Field :} \quad & \mathbf{v}_E = \frac{1}{B^2}\mathbf{E} \times \mathbf{B} \\
\text{General Force :} \quad & \mathbf{v}_F = \frac{1}{qB^2}\mathbf{F} \times \mathbf{B} \\
\text{Polarisation :} \quad & \mathbf{v}_P = \frac{m}{qB^2}\frac{d\mathbf{E}_\perp}{dt} \\
\text{Curvature :} \quad & \mathbf{v}_C = \frac{mv_\parallel^2}{qB^4}\mathbf{B} \times \left[\left(\mathbf{B} \cdot \nabla\right)\mathbf{B}\right] \\
\text{Gradient :} \quad & \mathbf{v}_\nabla = \frac{mv_\perp^2}{2qB^3}\left(\mathbf{B} \times \nabla B\right)
\end{aligned}$$

היפוך כיוון הפרסציה והחזרה מן הקטבים

המומנט המגנטי הוא היחס בין האנרגיה הקינטית של החלקיק לעצמת השדה המגנטי :

$$\mu = \frac{mv_\perp^2}{2B}$$

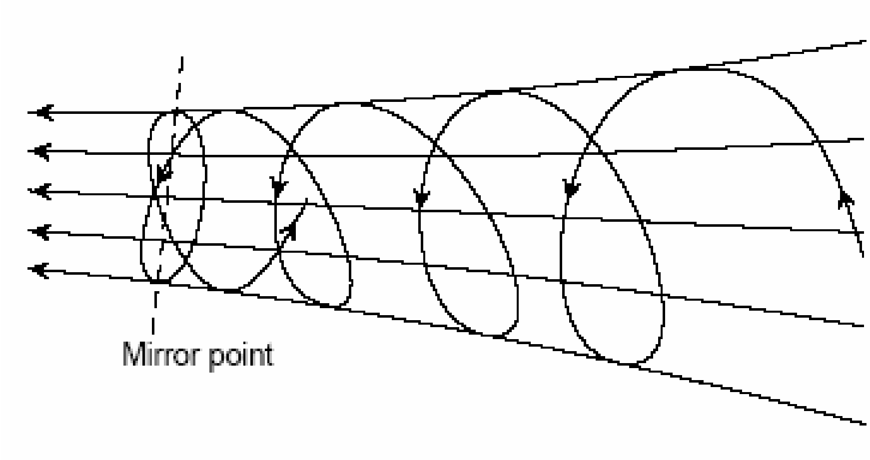
כאשר קווי השדה מתכנסים, משתנה גם היחס בין המהירות בציר z למהירות המשיקית,
כך שגודל המהירות נשמר.
מכאן ניתן להציב :

$$\mu = \frac{mv^2 \sin^2 \alpha}{2B}$$

כך שניתן לראות כי קיים קשר ישיר בין הזווית ביניהם לעצמת השדה המגנטי.

$$\frac{\sin^2 \alpha_2}{\sin^2 \alpha_1} = \frac{B_2}{B_1}$$

וכאשר הזווית תגיע ל 90 מעלות כיוון המהירות יתהפך.



החלק הכמותי – בכדור הארץ

השדה המגנטי בקירבת כדור הארץ:

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{M_E}{r^3}(-2\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$$

מומנט הדיפול של כדור הארץ:

$$M_E = 8.05 \times 10^{22}\ \mathrm{A\,m^2}$$

מדידת הזווית היא על פי :

$$\vartheta = \pi/2 - \theta$$

ניתן לראות כי כל קו שדה מתנהג על פי המשוואה:

$$r = r_{\mathrm{eq}}\ \cos^2\vartheta$$

כאשר r_{eq} הוא המרחק מכדור הארץ מול קו המשווה אל קו השדה.

נגדיר קליפת שדה ביחידות כדור הארץ:

$$L = r_{\mathrm{eq}}/R_E$$

רדיוס כדור הארץ:

$$R_E = 6.37 \times 10^6$$

עצמת השדה המגנטי לאורך הקו המגנטי ניתנת על ידי:

$$B = \frac{B_E}{L^3}\frac{(1 + 3\ \sin^2\vartheta)^{1/2}}{\cos^6\vartheta}$$

כאשר B_E הוא השדה בכדור הארץ:

$$B_E = \mu_0 M_E/(4\pi\, R_E^3) = 3.11 \times 10^{-5}\ \mathrm{T}$$

חישוב רדיוס הסיבוב של הפרוטונים והאלקטרונים:

ניקח לדוגמא מקרה פשוט ונסתכל מול קו המשווה :

כלומר,

$$(\vartheta = 0°)$$

במקרה זה נקבל:

$$B_{eq} = \frac{B_E}{L^3}$$

נציב בתדירות הסיבוב ונקבל:

$$\Omega_p = \frac{e\,B}{m_p} = 2.98\,L^{-3}\ \text{kHz},$$

$$|\Omega_e| = \frac{e\,B}{m_e} = 5.46\,L^{-3}\ \text{MHz},$$

באותו אופן נוכל לחשב את רדיוס הסיבוב של החלקיקים ביחס לרדיוס כדור הארץ:

$$\frac{\rho_p}{R_E} = \frac{\sqrt{2\,\mathcal{E}\,m_p}}{e\,B\,R_E} = \sqrt{\mathcal{E}(\text{MeV})}\left(\frac{L}{11.1}\right)^3$$

$$\frac{\rho_e}{R_E} = \frac{\sqrt{2\,\mathcal{E}\,m_e}}{e\,B\,R_E} = \sqrt{\mathcal{E}(\text{MeV})}\left(\frac{L}{38.9}\right)^3$$

חישוב נקודת ההחזרה וזמן המחזור של התהליך

ניזכר כי :

$$\alpha = \tan^{-1}(v_\perp / v_\parallel)$$

כך שהיחס בין הזווית והשדה בכל נקודה במהלך קו השדה ביחס לקו המשווה הוא :

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha_{\rm eq}} = \frac{B}{B_{\rm eq}}$$

חישבנו קודם כי :

$$B_{\rm eq} = B_E / L^3$$

נחשב היכן (באיזה קו אורך) מתבצע שינוי הכיוון, כלומר, שהזווית היא 90 והמהירות המקבילה היא 0.

$$\alpha = 90^\circ \ \ (i.e.,\ v_\parallel = 0)$$

נחשב את היחס בין השדה בקו המשווה לשדה בנקודת המראה (mirror).

$$\sin^2 \alpha_{\rm eq} = \frac{B_{\rm eq}}{B_m} = \frac{\cos^6 \vartheta_m}{(1 + 3\sin^2 \vartheta_m)^{1/2}}$$

מה קורה לחלקיקים שמגיעים נמוך מ 100 ק"מ ?

חישוב זמן המחזור בין נקודות המראה:

יש לחשב אינטגרל מסלולי לאורך מסלול החלקיק במשך מחזור שלם:

$$\tau_b = 4\int_0^{\vartheta_m} \frac{d\vartheta}{v_\parallel}\frac{ds}{d\vartheta}$$

פתרון האינטגרל הוא באופן נומרי, זאת מכיוון שמהירות ההתקדמות לאורך המסלול אינה אחידה.
תוצאה מקורבת היא:

$$\tau_b \simeq \frac{L\,R_E}{(\mathcal{E}/m)^{1/2}}\,(3.7 - 1.6\sin\alpha_{\rm eq})$$

אם נציב עבור פרוטון:

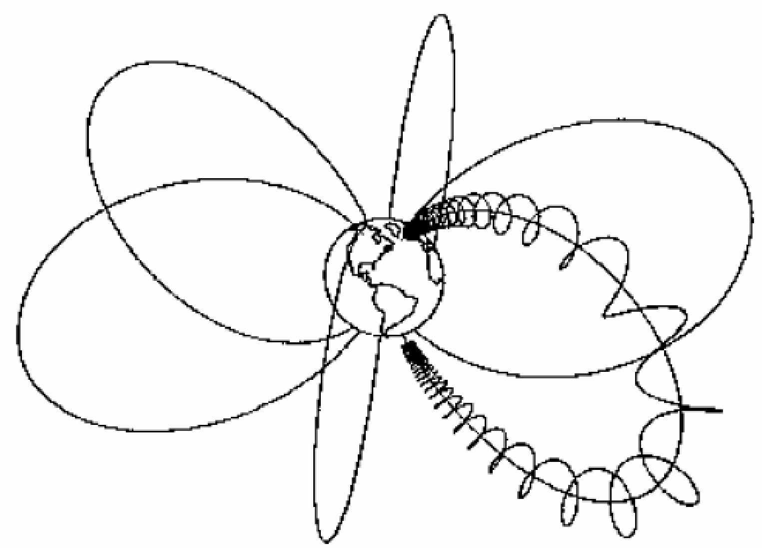
$$(\tau_b)_p \simeq 2.41\,\frac{L}{\sqrt{\mathcal{E}(\mathrm{MeV})}}\,(1-0.43\sin\alpha_{\rm eq})\ \ \mathrm{secs}$$

ועבור אלקטרון:

$$(\tau_b)_e \simeq 5.62\times10^{-2}\frac{L}{\sqrt{\mathcal{E}(\mathrm{MeV})}}\,(1-0.43\sin\alpha_{\rm eq})\ \ \mathrm{secs.}$$

מן המשוואות ניתן לראות שעבור לאלקטרונים עם אנרגיה קינטית מסדר גודל של MeV

יש זמן מחזור של פחות משנייה אחת. ולפרוטונים עם אותה אנרגיה כ 1-10 שניות.



חישוב זמן המחזור בכיוון האופקי – סביב כדור הארץ:

נחזור ונסתכל על הביטוי לסחיפה הנגרמת כתוצאה מגרדיאנט בשדה המגנטי.

- (השדה המגנטי נחלש בכיוון הרדיאלי – עם המרחק מכדור הארץ)

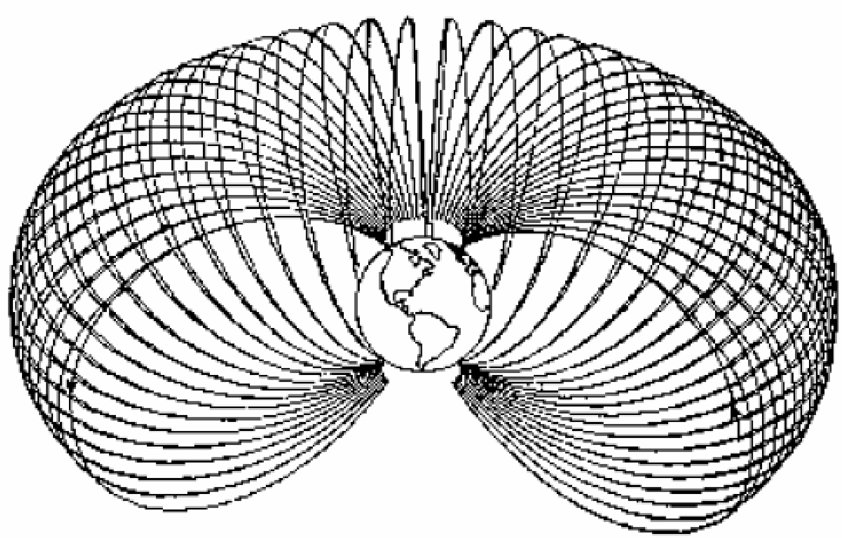
הביטוי למהירות הסחיפה :

$$\mathbf{v}_\nabla = \frac{m v_\perp^2}{2qB^3}\left(\mathbf{B}\times\nabla B\right)$$

אם נכניס לביטוי את B של כדור הארץ (מקודם) נקבל:

$$\boldsymbol{v}_{1\perp} \simeq -\mathrm{sgn}(\Omega)\,\frac{6\,\mathcal{E}\,L^2}{e\,B_E\,R_E}\,\left(1 - B/2B_m\right)\frac{\cos^5\vartheta\,(1+\sin^2\vartheta)}{(1+3\sin^2\vartheta)^2}\,\hat{\varphi}$$

באופן אינטואיטיבי $B\left(\hat{r},\hat{\theta},0\right)\times\nabla B\left(\hat{r},0,0\right)\Rightarrow V\left(0,0,\hat{\varphi}\right)$



- ניתן לראות מן הביטוי שקיבלנו כי ככל שהמיקום בקווי הגובה הוא גבוה יותר הביטוי קטן יותר – כלומר שרוב הזרם זורם סביב קו המשווה.

- מכיוון שהחלקיקים נעים מקוטב אל קוטב במהירות גדולה אך הסחיפה העיקרית היא במרכז – כך שכדי לחשב את מהירות הסחיפה יש למצע על פני מחזור שלם.

- המיצוע יכול להתבצע רק בצורה נומרית, והקירוב הוא:

$$\langle v_d \rangle \simeq \frac{6\,\mathcal{E}\,L^2}{e\,B_E\,R_E}\,(0.35 + 0.15\,\sin\alpha_{\rm eq})$$

כדי לקבל את הזמן, יש לחלק את היקף המסלול במהירות הסחיפה:

$$\langle \tau_d \rangle = \frac{2\pi\,L\,R_E}{\langle v_d \rangle} \simeq \frac{\pi\,e\,B_E\,R_E^2}{3\,\mathcal{E}\,L}\,(0.35 + 0.15\,\sin\alpha_{\rm eq})^{-1}$$

מכיוון שבביטוי הנ"ל המסה אינה מופיעה בצורה מפורשת – אין הבדל במהירות בין אלקטרון לפרוטון אך הכיוון הוא הפוך.

$$\langle \tau_d \rangle_p = \langle \tau_d \rangle_e \simeq \frac{1.05}{\mathcal{E}(\mathrm{MeV})\,L}\,(1 + 0.43\,\sin\alpha_{\rm eq})^{-1}\ \ \mathrm{hours}$$

כך שהביטוי הוא מסדר גודל של שעות בודדות.