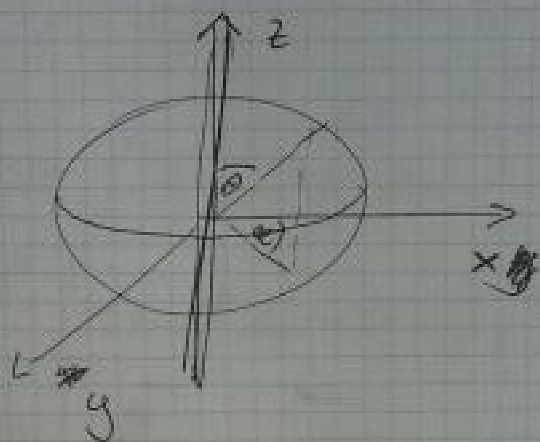
כדור מסה בר שסובב דרך
מרכז המסה



נבחר מיקום נקודה כדורית

$$\vec{r} = r\sin\theta\cos\varphi\,\hat{x} + r\sin\theta\sin\varphi\,\hat{y} + r\cos\theta\,\hat{z}$$

$$dV = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

המרחק מ-z

$$I_z = \int (x^2+y^2)\,dm = \int \left((r\sin\theta\cos\varphi)^2 + (r\sin\theta\sin\varphi)^2\right) dm$$

$$= \int r^2\sin^2\theta\,dm \qquad dm = \rho\,dV$$

$$I_z = \rho\int_0^R r^4\,dr \int_0^\pi \sin^3\theta\,d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= \rho\,\frac{2\pi R^5}{5}\int_0^\pi \sin^3\theta\,d\theta$$

החלפת משתנים $\alpha = \cos\theta$.

$$d\alpha = d(\cos\theta) = -\sin\theta\,d\theta$$

$$d\theta = -\frac{d\alpha}{\sin\theta}$$

$$I_z = \rho \frac{R^5}{5} 2\pi \int_{-1}^{1} \sin^2\theta \, d\alpha$$

$$= \rho \frac{R^5}{5} 2\pi \int_{-1}^{1} (1-\cos^2\theta) \, d\alpha$$

$$= \frac{2\pi\rho R^5}{5} \int_{-1}^{1} (1-\alpha^2) \, d\alpha = \frac{8}{15}\pi\rho R^5$$

$$M = \frac{4\pi}{3}\rho R^3 \Rightarrow \rho = \frac{3M}{4\pi R^3}$$

$$I_z = \frac{8}{15}\pi R^5 \cdot \frac{3M}{4\pi R^3} = \frac{2}{5} M R^2 .$$

גליל עם רדיוס פנימי R_1 וחיצוני R_2.

צפיפות מסה אחידה. מסה M. אורך L.

מומנט התמד סביב ציר הגליל

$$M = \int \rho \, dV = \rho \int_0^L dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{R_1}^{R_2} r \, dr = \rho L \pi (R_2^2 - R_1^2)$$

$$\rho = \frac{M}{L\pi(R_2^2 - R_1^2)}$$

$$I = \int r^2 dm = \rho \int_0^L dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = \frac{M}{\pi L (R_2^2 - R_1^2)} L 2\pi \cdot \frac{R_2^4 - R_1^4}{4}$$

$$I_z = \frac{M(R_2^2 + R_1^2)}{2}$$