③ חשב את הנגזרות הראשונות והשניות של הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$

ב. $f(x) = x^2 e^{8x+\cos x}$

ג. $f(x) = 8(x\ln x - x)^3$

ד. $f(x) = x^x$

$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$

$\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a \quad , \frac{d}{dx} e^x = e^x$

$\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$

$\frac{d}{dx} fg = f\frac{d}{dx}g + g\frac{d}{dx}f$

$\frac{d}{dx} f(g) = f' \frac{d}{dx} g$

* מה שלא מספיקים בתרגול - להמשיך בבית.

א.

$$f(x) = \frac{1+x}{1-x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{(1+x)}{(1-x)^2}(-1) = \frac{1}{1-x} + \frac{1+x}{(1-x)^2} = \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-4}{(1-x)^3}(-1) = \frac{4}{(1-x)^3}$$

ב.

$$f(x) = x^2 e^{8x+\cos x}$$

$$f'(x) = 2x e^{8x+\cos x} + x^2 e^{8x+\cos x}(8-\sin x) =$$

$$= e^{8x+\cos x}(2x + 8x^2 - x^2 \sin x)$$

$$f''(x) = e^{8x+\cos x}(2x+8x^2-x^2\sin x)(8-\sin x)$$

$$+ e^{8x+\cos x}(2+16x-2x\sin x - x^2\cos x)$$

ג.

$$f(x) = 8(x\ln x - x)^3$$

$$f'(x) = 24(x\ln x - x)^2(1+\ln x - 1) =$$

$$= 24(x\ln x - x)^2 \ln x$$

$$f''(x) = 48(x\ln x - x)(\ln x)^2 + \frac{24}{x}(x\ln x - x)^2$$

ד.

$$f(x) = x^x$$

$$f'(x) = x x^{x-1} + x^x \ln x = x^x(1+\ln x)$$

$$f''(x) = x^x(1+\ln x)^2 + x^x\left(\frac{1}{x}\right) = x^x\left((1+\ln x)^2 + \frac{1}{x}\right)$$

טור טיילור מוגדר כ:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\dots$$

1) נקרב $\sin(1°)$, נפתח את $\sin(x)$ סביב $x_0=0$ ונציב $x=1°=\frac{\pi}{180}$ rad:

$f(x)=\sin(x)$; $f'(x)=\cos(x)$, $f''(x)=-\sin(x)$, $f'''(x)=-\cos(x)$.

אז נקבל:

$$\sin(x)\approx x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!} \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{180}\right)\approx\frac{\pi}{180}-\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{180}\right)^3+\frac{1}{120}\left(\frac{\pi}{180}\right)^5=0.01745\dots$$

לפי מחשבון $\sin(1)=0.01745\dots$

2) נקרב $\sin(61°)$. נפתח $\sin(x)$ סביב $x_0=\frac{\pi}{3}$ rad $=60°$ עבור $x-x_0=\frac{\pi}{180}$:

$$f(x_0)=\frac{\sqrt{3}}{2},\ f'(x_0)=\frac{1}{2},\ f''(x_0)=-\frac{\sqrt{3}}{2},\ f'''(x_0)=-\frac{1}{2}$$

אז נקבל:

$$\sin(61°)\simeq\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\frac{\pi}{180}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{180}\right)^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{180}\right)^3\simeq 0.8746\dots$$

לפי מחשבון: $\sin(61°)=0.8746\dots$

3) נקרב $\sqrt{10}$, נפתח את הפונקציה $\sqrt{x}$ סביב $x_0=9$ עבור $x-x_0=1$:

$$f(x)=\sqrt{x},\ f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}},\ f''(x)=\frac{-1}{4(x)^{3/2}},\ f'''(x)=\frac{3}{8}\frac{1}{x^{5/2}}$$

$$f(x_0)=3,\ f'(x_0)=\frac{1}{6},\ f''(x_0)=-\frac{1}{108},\ f'''(x_0)=\frac{1}{648}$$

$$f(x)\approx 3+\frac{1}{6}\cdot 1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{108}1^2+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{648}\cdot 1^3\simeq 3.1622$$

לפי מחשבון $\sqrt{10}=3.1622$.

תרגיל

א.)

$$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{1/2}\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + C$$

ב.)

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = -x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$$

ג.)

$$\int \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \int\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\right)dx = \int\left(x^{-1/3} + x^{-1/6}\right)dx = \int x^{-1/3}\,dx + \int x^{-1/6}\,dx =$$

$$= \frac{3}{2}x^{2/3} + C + \frac{6}{5}x^{5/6} + D = \frac{3}{2}x^{2/3} + \frac{6}{5}x^{5/6} + A$$