ע)

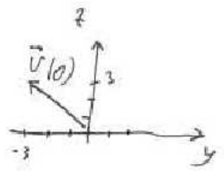
3) $\vec{r} = t^2\,\hat{x} - 3t\,\hat{y} + (2+3t-4.9t^2)\,\hat{z}$

א. הכי קל לגזור:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2t\,\hat{x} - 3\,\hat{y} + (3-9.8t)\,\hat{z}$$

$$\vec{v}(0) = 0\hat{x} - 3\hat{y} + 3\hat{z}$$

המהירות ב- $t=0$



אפשר גם לראות ש- $x=t^2$.
כלומר התנועה בכיוון x היא בתאוצה קבועה (כלומר $x=x_0+v_{0x}t+\frac{1}{2}a_x t^2$), ולכן:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ v_{0x} = 0 \\ a_x = 2\,\mathrm{m/s^2} \end{cases}$$

ובאותו אופן ניתן לקבל את y_0, v_{0y}, a_y וכנ"ל ל- z.
אבל זה די מסורבל...

ב. הכי קל לגזור את $\vec{v}$:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 2\hat{x} + 0\hat{y} + (-9.8)\hat{z}$$

ג. ב- $t=0$: $|\vec{v}| = \sqrt{0^2+(-3)^2+3^2} = \sqrt{18}\,\mathrm{m/s}$

$|\vec{a}| = \sqrt{2^2+0^2+(-9.8)^2} \simeq 10\,\mathrm{m/s^2}$ (התאוצה קבועה וזה זהה לכל זמן).

קינמטיקה

השלב הראשון הוא להגדיר מערכת צירים. בפתרון זה נבחר את הראשית בנקודת הזריקה, את כיוון y כלפי מעלה, ואת כיוון x ימינה.

את המהירות ההתחלתית נמיר לוקטור בצורה הבאה:

$$\vec{v}_0 = 25.3\frac{m}{s}\cdot\begin{pmatrix}\cos(42^\circ)\\ \sin(42^\circ)\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}18.8\frac{m}{s}\\ 16.9\frac{m}{s}\end{pmatrix}$$

תאוצת הנפילה החופשית במערכת הצירים שלנו היא:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}0\\ -g\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}0\\ -9.8\frac{m}{s^2}\end{pmatrix}$$

ולכן, נוסחאות המהירות והמיקום כפונקציה של הזמן הן:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t \approx \begin{pmatrix}18.8\frac{m}{s}\\ 16.9\frac{m}{s} - 9.8\frac{m}{s^2}t\end{pmatrix}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \vec{a}\frac{t^2}{2} \approx \begin{pmatrix}18.8\frac{m}{s}t\\ 16.9\frac{m}{s}t - 4.9\frac{m}{s^2}t^2\end{pmatrix}$$

1. כמה זמן נמצא הכדור באוויר בטרם הוא פוגע בקיר?

   נבדוק לפי נוסחת המיקום מתי הכדור נמצא במרחק האופקי המתאים לקיר.

   $$x = 18.8\frac{m}{s}t = 21.8m \Rightarrow t = \frac{21.8m}{18.8\frac{m}{s}} \approx 1.16s$$

2. כמה גבוה מעל נקודת הזריקה יפגע הכדור בקיר?

   נציב את זמן הפגיעה שמצאנו בסעיף הקודם ברכיב האנכי של נוסחת המיקום.

   $$y(t = 1.16s) = 16.9\frac{m}{s}\cdot 1.16s - 4.9\frac{m}{s^2}(1.16s)^2 \approx 13.0m$$

3. מהו וקטור מהירות הכדור ברגע הפגיעה בקיר?

   נציב את זמן הפגיעה בנוסחא הכללית שמצאנו למהירות.

   $$\vec{v}(t = 1.16s) = \begin{pmatrix}18.8\frac{m}{s}\\ 16.9\frac{m}{s} - 9.8\frac{m}{s^2}(1.16s)\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}18.8\frac{m}{s}\\ 5.5\frac{m}{s}\end{pmatrix}$$

4. האם הכדור עבר את נקודת שיא הגובה ברגע הפגיעה?

   מכיוון שרכיב המהירות בציר y שקיבלנו בסעיף הקודם חיובי, הכדור עודנו בתנועתו מעלה, ולא עבר את שיא הגובה.

שאלה ממבחן 2005 מועד א'

גוף נופל בנפילה חופשית ממנוחה מנקודה בגובה H.
ברגע שהגוף מתחיל ליפול נזרק גוף שני מהקרקע.
שני הגופים מתנגשים בגובה h מעל הקרקע.
המרחק האופקי בין הגופים הוא L

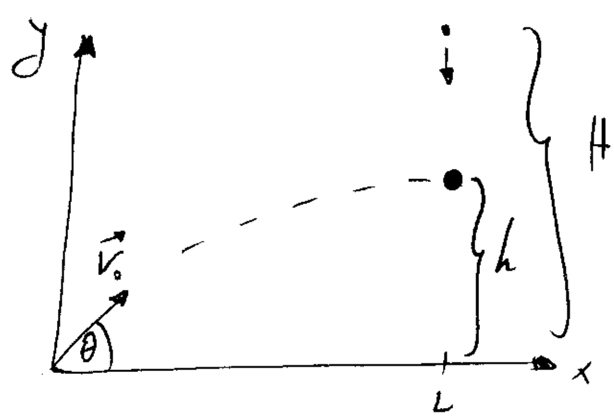
1) באיזו זווית מעל האופק נזרק הגוף השני?

2) באיזו מהירות $\vec{V_0}$ נזרק הגוף השני?

3) מהי מהירותו היחסית של הגוף השני ביחס לגוף הראשון ברגע הפגיעה?

פתרון:

* נכתוב את משוואות התנועה עבור 2 הגופים ולאחר מכן נציב את תנאי השאלה: מפגש בגובה h במרחק L



גוף I:

$$y(t) = H - \frac{1}{2}gt^2$$

$$x(t) = L$$

גוף II:

$$y(t) = V_0 \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$x(t) = V_0 \cos\theta \cdot t$$

1)

* נמצא כמה זמן לקח לגוף ה I להגיע לגובה h

$$h = H - \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2(h-H)}{g}} = \tilde{t}$$ נסמן בו

* ידוע לנו כי בזמן $\tilde{t}$ גוף II נמצא בגובה h ובמרחק אופקי L ולכן:

(I) $L = V_0 \cos\theta \cdot \tilde{t}$

(II) $h = V_0 \sin\theta \cdot \tilde{t} - \frac{1}{2}g\tilde{t}^2 \Rightarrow V_0 \sin\theta \cdot \tilde{t} = h + \frac{1}{2}g\tilde{t}^2$

נחלק את II ב I ונקבל:

$$\tan\theta = \frac{h+\frac{1}{2}g\tilde{t}^2}{L}$$

נציב את $\tilde{t}$:

$$\tan\theta = \frac{\cancel{h}+\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{g}\cdot\frac{\cancel{2}(H-\cancel{h})}{\cancel{g}}}{L} = \boxed{\frac{H}{L}} \Rightarrow \boxed{\theta = \arctan\left(\frac{H}{L}\right)}$$

2) אם למצוא את V_0 נשתמש במשוואה I

I (אפשר להשתמש בביטוי $1+\tan^2\theta = 1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$)

II (או למצוא את רכיבי הוקטור V_0 ולאחר מכן למצוא את V_0 במשוואת פיתגורס)

נשתמש ב II:

כמו שראינו קודם

$$L = V_0\cos\theta\cdot\tilde{t} \rightarrow V_0\cos\theta = \frac{L}{\tilde{t}} = \frac{L}{\frac{2(H-h)}{g}} = \boxed{\frac{Lg}{2(H-h)}}$$

כמו כן ניתן להכפיל את המשוואה ב $\sin\theta$ ולחלק ב $\cos\theta$ ונקבל:

$$V_0\sin\theta = \frac{L}{\tilde{t}}\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{L}{\tilde{t}}\tan\theta = \frac{\cancel{L}}{\frac{2(H-h)}{g}}\cdot\frac{H}{\cancel{L}} = \boxed{\frac{Hg}{2(H-h)}}$$

$$|\vec{V}_0| = \sqrt{\left[\frac{Lg}{2(H-h)}\right]^2+\left[\frac{Hg}{2(H-h)}\right]^2} = \boxed{\frac{g}{2(H-h)}\sqrt{L^2+H^2}}$$

3) נגדיר מהירות יחסית:

$$V_{1y} = -gt \quad , V_{1x} = 0$$

$$V_{2y} = V_0 \sin\theta - gt \quad , V_{2x} = V_0 \cos\theta$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{V}_{rel} = \left(V_{2x} - V_{1x} \quad , V_{2y} - V_{1y} \right) =$$

$$= \left(V_0 \cos\theta - 0 \quad , V_0 \sin\theta - gt - (-gt) \right) =$$

$$\vec{V}_{rel} = \left(V_0 \cos\theta \quad , V_0 \sin\theta \right)$$