

## חישוב מומנט התמד של מערכת נקודות

מומנט ההתמד מוגדר:

$$I = \sum m_i r_i^2$$

שימו לב שהכוונה היא לציר שניצב לדף.

1. סביב מסה  $m_1$ :

$$I = \sum m_i r_i^2 = m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 = m_2 L^2 + m_3 (\sqrt{2}L)^2 = \frac{m}{2} L^2 + m 2L^2 = \frac{5}{2} m L^2$$

2. סביב מסה  $m_3$ :

$$I = \sum m_i r_i^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = m_1 (\sqrt{2}L)^2 + m_2 L^2 = \frac{m}{2} 2L^2 + \frac{m}{2} L^2 = \frac{3}{2} m L^2$$

3. על מנת לעבור לציר מקביל העובר דרך מרכז המסה, ניתן להשתמש במשפט שטיינר (זיכרו: המשפט נכון אך ורק למעבר מ/אל מרכז המסה!) עלינו לברר את המרחק של מרכז המסה מאחד הצירים שכבר חישבנו. קודם כל נברר את מרכז המסה, במערכת הצירים שמופיעה בשאלה. בציר X נקבל:

$$X_{cm} = \frac{m_1 L + m_2 0 + m_3 0}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{\frac{m}{2} L}{2m} = \frac{L}{4}$$

ובציר Y:

$$Y_{cm} = \frac{m_1 0 + m_2 0 + m_3 L}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{\frac{m}{2} L}{2m} = \frac{L}{2}$$

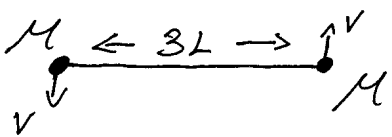
עכשיו נותר לחשב את המרחק (בריבוע) בין מרכז המסה לאחת הנקודות שכבר חישבנו. אבחר את  $m_1$ :

$$R_{cm \rightarrow m_1}^2 = (L - \frac{L}{4})^2 + \frac{L^2}{2} = \frac{13}{16} L^2$$

ומשפט שטיינר נותן לנו:

$$I_{cm} = I_{m_1} - (m_1 + m_2 + m_3) R_{cm \rightarrow m_1}^2 = \frac{5}{2} m L^2 - 2m \frac{13}{16} L^2 = \frac{7}{8} m L^2$$

1-6601



המסה הימנית נעה כלפי מעלה במהירות  $v$  והמסה השמאלית נעה כלפי מטה במהירות  $v$ . המרחק בין המסות הוא  $3L$ .

$$R = 1.5L$$

$$J_i = MvR + MvR = 2MvR = Mv \cdot 3L$$

$$J_f = I\omega = (MR^2 + MR^2)\omega = 2MR^2\omega$$

$$J_i = J_f \Rightarrow 2MR^2\omega = 3MvL$$

$$\omega = \frac{3}{2} \frac{vL}{R^2} = \frac{2}{3} \frac{v}{L} = \frac{v}{R}$$

$$E_x = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot 2MR^2 \cdot \frac{v^2}{R^2} = 2 \cdot \frac{1}{2} Mv^2 = Mv^2 \quad (2)$$

$$\tilde{R} = \frac{1}{2}L = \frac{1}{3}R$$

(2)

$$J_i = I\omega = 2MRv$$

$$J_f = \tilde{I}\tilde{\omega} = 2M\tilde{R}^2 \cdot \tilde{\omega} = \frac{2}{9} MR^2 \tilde{\omega}$$

$$\Rightarrow \tilde{\omega} = 9 \frac{v}{R} = 9\omega$$

$$\tilde{E}_x = \frac{1}{2} \tilde{I} \tilde{\omega}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9} MR^2 \cdot 81\omega^2 = 9MR^2\omega^2 = 9Mv^2 = 9E_x \quad (2)$$

המהירות של המסה הימנית היא  $\tilde{v} = 3v$  והמהירות של המסה השמאלית היא  $\tilde{v} = 3v$ .

המהירות של המסה הימנית היא  $3v$  והמהירות של המסה השמאלית היא  $3v$ .

Parameters:

$$L = 2[m], m_1 = 5[kg], m_2 = 0.01[kg], v = 400[m/s], x = 0.1[m]$$

a. Conservation on angular momenta around the rod's axis (The gravity is parallel to the displacement vector):

$$L_z = (L - x)m_2v \sin(90) = I\omega \quad (1)$$

The moment of inertia of the rod and the bullet is:

$$I = \frac{m_1L^2}{12} + m_1\left(\frac{L}{2}\right)^2 + m_2(L - x)^2 \quad (2)$$

So the angular velocity after the collision:

$$\omega = \frac{(L - x)m_2v \sin(90)}{\frac{m_1L^2}{12} + m_1\left(\frac{L}{2}\right)^2 + m_2(L - x)^2} \quad (3)$$

b. The distance between the axis and the center of mass:

$$L_{cm} = \frac{m_1\frac{L}{2} + m_2(L - x)}{m_1 + m_2} \quad (4)$$

Using conservation of energy:

$$\frac{I\omega^2}{2} = (m_1 + m_2)gL_{cm}(1 - \cos \varphi) \quad (5)$$

$$(1 - \cos \varphi) = \frac{I\omega^2}{2g(m_1\frac{L}{2} + m_2(L - x))} \quad (6)$$

$$\varphi = \cos^{-1}\left(1 - \frac{I\omega^2}{2g(m_1\frac{L}{2} + m_2(L - x))}\right) \quad (7)$$