קפיץ וחיכוך

בתנועה מA ל C פועלים כוחות הכובד, הנורמל, והחיכוך. הכובד משמר, הנורמל תמיד ניצב לתנועה ולכן אינו עושה עבודה, ואת עבודת החיכוך אנו יכולים לחשב. כוח החיכוך בקטע המדובר הוא:

$$f = \mu_k N$$

$$N - mg = 0$$

$$f = \mu_k mg$$

$$W = \int f dr = -\mu_k mgd$$

נסמן את גובה 0 במישור , ונשתמש במשפט עבודה אנרגיה:

$$\begin{aligned} K_i + U_i + W &= K_f + U_f \\ mgR - \mu_k mgd &= \frac{mv^2}{2} \\ v^2 &= 2g(R - \mu_k d) \end{aligned}$$

שימו לב שהמהירות בריבוע חייבת להיות חיובית, וזה נותן לנו תנאי לגבי האם בכלל הגוף יגיע לקפיץ.
הקפיץ מתכווץ בS, והשוואת האנרגיה מרגע הפגיעה בקפיץ ועד סיום ההתכווצות נותנת:

$$\begin{aligned} \frac{mv^2}{2} &= \frac{kS^2}{2} \\ 2mg(R - \mu_k d) &= kS^2 \\ k &= \frac{2mg(R - \mu_k d)}{S^2} \end{aligned}$$

מכיוון שהחיכוך בהלוך ובחזור יעשה את אותה עבודה, ניתן פשוט לרשום את משפט העבודה-אנרגיה מתחילת התנועה ועד סופה:

$$\begin{aligned} mgR + W &= mgh \\ mgR - 2 \cdot \mu_k mgd &= mgh \\ h &= R - 2\mu_k d \end{aligned}$$

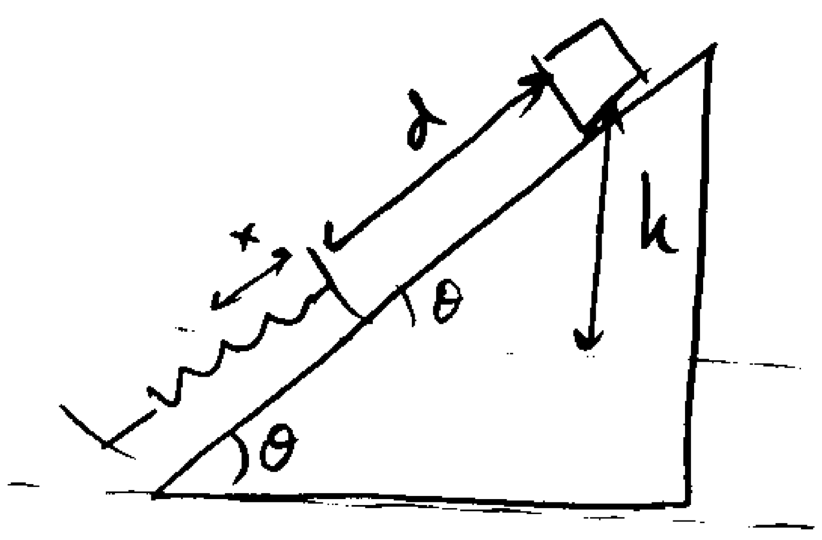
יש לשים לב ש$h > 0$. אם מקבלים גובה קטן מאפס, זה אומר שהגוף בכלל לא יסיים את התנועה, והחיכוך יעצור אותו בדרך.

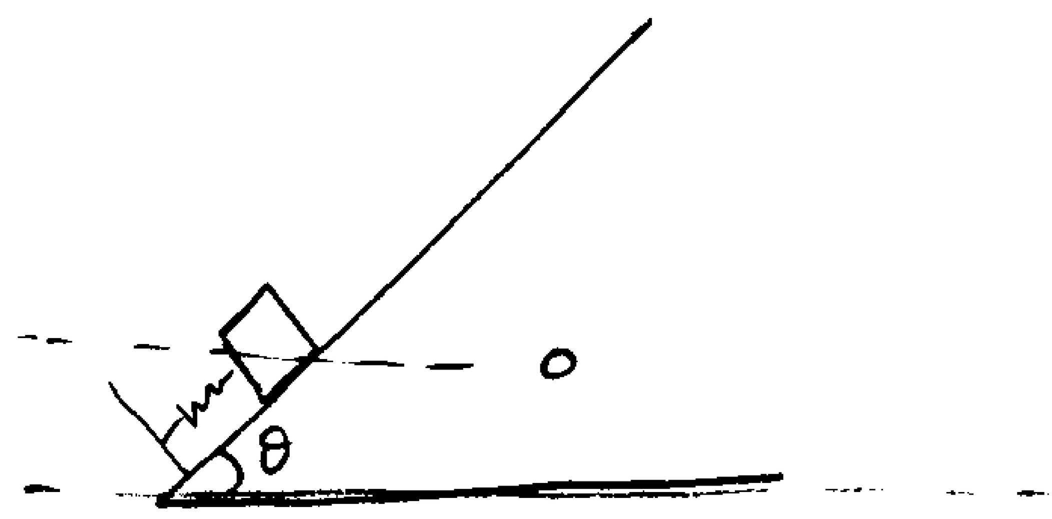
תרגיל <1-4205>

1) נשתמש בשימור אנרגיה מכיוון שבבעיה יפעלו על הגוף רק כוחות משמרים.

נבחר את נק' האפס בנק' בה המסה נעצרת לגמרי

אז האנרגיה בהתחלה תהיה רק גובה ובסוף רק קפיץ.





$$E_i = mgh = mg(x+d)\sin\theta$$

$$E_f = \frac{1}{2}kx^2$$

$$mg\underbrace{(x+d)}_{L}\sin\theta = \frac{1}{2}kx^2$$

$$L = \frac{1}{2}\frac{kx^2}{mg\sin\theta}$$

קבוע הקפיץ לא נתון ולכן צריך לחשב אותו מהנתון על הכח שיש להפעיל על הקפיץ בכדי לכווץ אותו באורך Δx

$$F = \Delta x \cdot k \Rightarrow k = \frac{F}{\Delta x}$$

אז בסופו של דבר נקבל

$$L = \frac{1}{2}\frac{Fx^2}{\Delta x\, mg\sin\theta} = \frac{1}{2}\frac{268\times\left(\frac{5.38}{100}\right)^2}{\left(\frac{2.33}{100}\right)\times 3.18\times 10\times\sin 32} \cong 1m$$

2) עכשיו ניתן למצוא את d. את L הגדרנו בעזרת x ו-d אז

$$d = L - x$$

עכשיו שוב נשתמש בשימור אנרגיה

$$E_i = mgh = mgL\sin\theta$$

$$E_f = mgx\sin\theta + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\cancel{m}gL\sin\theta = \cancel{m}gx\sin\theta + \frac{1}{2}\cancel{m}v^2$$

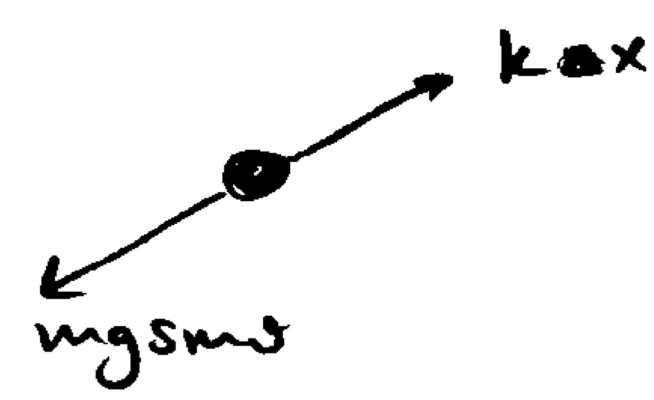
$$v^2 = 2g\sin\theta(L-x) = 2gd\sin\theta$$

$$v = \sqrt{2\times10\times\sin32^\circ\times0.946^2} \approx \sqrt{2\times10\times\frac{1}{2}\times0.946^2} \approx 3\ m/s$$

3) המהירות המקסימלית של הגוף היא כאשר שקול הכוחות הוא אפס, לכן נחפש את המיקום בו יש ש.מ.

$$mg\sin\theta - k\Delta x = 0$$

$$\Delta x = \frac{mg\sin\theta}{k} \approx$$



כאשר הכיווץ של הקפיץ הוא Δx כאשר התאוצה היא אפס.

נרשום את האנרגיה של הגוף בנק' זו

$$E_{ש.מ.} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k\Delta x^2 + mg(x-\Delta x)\sin\theta$$

$$E_i = mg(x+d)\sin\theta$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k\Delta x^2 + mg(\cancel{x}-\Delta x)\sin\theta = mg(\cancel{x}+d)\sin\theta$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(d+\Delta x)\sin\theta - \frac{1}{2}k\Delta x^2$$

$$v^2 = 2g(d+\Delta x)\sin\theta - \frac{k}{m}\Delta x^2$$

4) נחפש לבדוק מה המרחק שהגוף עבר.

$$\begin{cases} E_i = mg(\tilde{x}+d)\sin\theta \\ E_f = \frac{1}{2}k\tilde{x}^2 \\ W = -f_k(\tilde{x}+d) = -\mu mg\cos\theta(\tilde{x}+d) \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}k\tilde{x}^2 - mg(\tilde{x}+d)\sin\theta = -\mu mg\cos\theta(\tilde{x}+d)$$

$$\frac{1}{2}k\tilde{x}^2 = mg(\tilde{x}+d)\underbrace{(\sin\theta - \mu\cos\theta)}_{<0}$$

כלומר שהקפיץ לא התכווץ

נבדוק אם לגוף יש מהירות - כלומר אם התזוזה

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v^2-\cancel{m}gL\sin\theta=-\mu\cancel{m}gL\cos\theta$$

$$v^2=2gL\underbrace{(\sin\theta-\mu\cos\theta)}_{<0}$$

$$\begin{cases} E_f=\frac{1}{2}mv^2 \\ E_i=mgL\sin\theta \\ W_f=-\mu mgL\cos\theta \end{cases}$$

שוב קיבלנו ביטוי לא הגיוני הפעם עבור המהירות, ולכן הגוף בכלל לא זז.

כלומר במקרה זה עם החיכוך הגוף לא נע ולכן אין מה לדבר על הסעיפים
כי הגוף לא נע.

גוף מחליק

נפתור את השאלה ע"י חישוב העבודה שנעשתה על הגוף, והשוואת עבודה זו להפרש האנרגיה הקינטית.
על הגוף פועלים שלושה כוחות: הכובד (mg), הנורמל (N), והחיכוך (f).
הנורמל תמיד ניצב לתנועה, ולכן לא מבצע עבודה.

1. בקטע המעגלי (A-B) כיוון כוח הכובד הוא כלפי מטה, והחלק הרלוונטי מכוח זה (המקביל לכיוון התנועה) הוא: $mg\cos\theta$
כיוון כוח החיכוך הוא תמיד נגד כיוון התנועה, וגודלו משתנה על פי הנוסחא שניתנה לנו בשאלה.
המסלול שלנו הוא לאורך קשת המעגל, ולכן : $ds = Rd\theta$
לסיכום, סך העבודה שנעשתה על הגוף בקטע המעגלי היא:

$$W=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(mg\cos\theta-\frac{b}{\pi^4}\theta^3)Rd\theta=\left(mg\sin\theta-\frac{b}{\pi^4}\frac{\theta^4}{4}\right)R\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=mgR-\frac{b}{\pi^4}\frac{\pi^4}{64}=mgR-\frac{b}{64}R$$

נשאלנו מה יהיה המקדם b כך שמהירות בנקודה B תהיה זהה למהירות בנקודה A, כלומר שסך העבודה שנעשתה על הגוף היא אפס. התשובה היא כש $b=64mg$

2. בסעיף זה שואלים, עם המקדם b שמצאנו, מה יהיה המרחק B-C. למעשה, אם המקדם b הוא שמצאנו, אנחנו יודעים שלא התבצעה על הגוף עבודה בקטע המעגלי, ולכן מהירותו בנקודה B שווה למהירותו ההתחלתית v0 מהנקודה A!
אז השאלה היא מה המרחק שיעבור גוף עם מהירות התחלתית v0, כאשר פועל עליו חיכוך עם המקדם μ
מכיוון שהגוף מונח על השולחן, ולא מאיץ בכיוון האנכי, הנורמל שווה לכוח הכובד (N=mg). ולכן החיכוך הקינטי הוא:
$$f_k=\mu N=\mu mg$$
ורק החיכוך הקינטי עושה עבודה (הכובד והנורמל אנכים לתנועה). נחשב את העבודה לאורך קטע באורך L.
$$W=\int_0^L -\mu mg\,dx=-\mu mgL$$
עכשיו נוסיף את התנאי שהמהירות הסופית היא 0, ובעזרת משפט העבודה-אנרגיה :
$$m\frac{0^2}{2}-m\frac{v_0^2}{2}=W=-\mu mgL$$
$$L=\frac{v_0^2}{2\mu g}$$
וזו התשובה לשאלה. כדאי לבדוק שהיחידות מסתדרות.

תרגיל <1_4101>

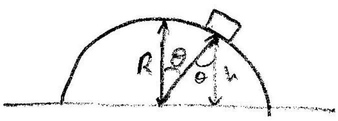
א) העבודה מוגדרת $$W=\int_\Gamma \vec{F}\,d\vec{r}$$

עבור הכבידה ובעולם בדו-מימד

$$\vec{F}=(0,-mg) \quad ; \quad d\vec{r}=(dx,dy)$$

אז נקבל

$$W_g=-mg\int_{y_i}^{y_f} dy = -mg(y_f-y_i)$$



רק נזכר למצוא את הגובה $h=R\cos\theta$

$$W_g=-mg(R\cos\theta-R)=mgR(1-\cos\theta)$$

ב) לפי משפט עבודה-אנרגיה קינטית

$$\Delta k = W_{tot}$$

$$k(\theta)-k(0)=mgR(1-\cos\theta)+W_N$$

נשים לב כי במקרה זה עבודת הנורמל היא $W_N=0$ מכיוון ש

בקואורדינטות פולריות $\vec{F}=(N,0)$ $\quad d\vec{r}=(0,\rho d\varphi)$

$$\vec{F}\cdot d\vec{r}=0.$$

מכיוון והגוף היה במנוחה אז $k(0)=0$

$$k(\theta)=mgR(1-\cos\theta)$$

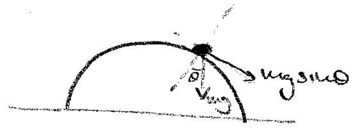
ג) התאוצה של הגוף היא (בקואורדינטות פולריות)

$$\vec{a} = a_r\hat{r} + a_t\hat{\varphi}$$

את a_r נמצא בעזרת הגדרתה עבור תנועה מעגלית - עקומה

$$a_r = \frac{v^2}{R} = \left\{E_k = \frac{1}{2}mv^2(\theta)\right\} = \frac{2E_k(\theta)}{mR} = 2g(1-\cos\theta)$$

את התאוצה המשיקית נמצא בעזרת רכיב הכח המשיקי

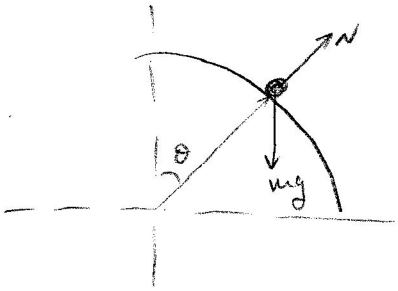


$$F_t = ma_t \Rightarrow \quad a_t = g\sin\theta$$

אז התאוצה היא

$$\vec{a} = (2g(1-\cos\theta), g\sin\theta)$$

ד) נחשב את זוית ההתנתקות



$$\sum F_r = ma_r \Rightarrow \quad N - mg\cos\theta = -m\frac{v^2}{R}$$

בנקודת ההתנתקות נדרוש כי $N=0$

$$N = m\left(g\cos\theta_0 - \frac{v^2}{R}\right) \overset{!}{=} 0$$

$$g\cos\theta_0 = 2g(1-\cos\theta_0)$$

$$\cos\theta_0 = 2/3$$

ניתן לראות כי הזווית הקריטית תלויה בהגעה למהירות קריטית. עם חיכוך "תקח" יותר להגיע למהירות הזו.

$$\Delta k = \frac{1}{2}mv^2_{\text{עם חיכוך}} = W_g + \cancel{W_N}^{0} + W_{friction}$$

$$v^2_{\text{עם חיכוך}} = \frac{2W_{friction}}{m} + 2gR(1-\cos\theta)$$

נזכור כי

$$2gR(1-\cos\theta) = V^2_{\text{ללא חיכוך}}$$

אז נקבל ש-

$$V^2_{\text{עם חיכוך}} = \frac{2W_{friction}}{m} + V^2_{\text{ללא חיכוך}}$$

מכיוון שעבודת החיכוך היא שלילית אז

$$V^2_{\text{עם חיכוך}} < V^2_{\text{ללא חיכוך}}$$

עבור כל θ.