תרגיל <1 6420>

נכתוב את משוואות התנועה עבור המסות התלויות ובנוסף את משוואת המומנטים עבור הדיסקה הכפולה

נבחר צירים כלפי מטה עבור כל אחת מהמסות

$$\sum F = ma$$

$$\mathrm{M}_1 g - T_1 = M_1 a_1 \ \ , M_2 g - T_2 = M_2 a_2$$

$$\mathrm{M}_1(g - a_1) = T_1 \quad , \quad M_2(g - a_2) = T_2$$

נבחר ציר סיבוב במרכז הדיסקות וכיוון חיובי נגד כיוון השעון

$$\sum \tau = I\alpha$$

$$\sum \tau = T_2 r_2 - T_1 r_1 = I\alpha$$

כאשר מומנט ההתמד הוא

$$I = \frac{1}{2}(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)$$

עדיין יש לנו יותר נעלמים ממשוואות ולכן נצטרך למצוא את האילוץ

האילוץ ינבע מכך שהתנועה של החוטים היא ללא החלקה ולכן נקבל

$$a_1 = -\alpha r_1, \qquad a_2 = \alpha r_2$$

כעת נוכל לפתור את מה שנתבקשנו

א' – המערכת בשיווי משקל ולכן כל התאוצות שוות ל-0

מכאן נקבל

$$\mathrm{M}_1 g = T_1 \ \ , M_2 g = T_2$$

נציב במשוואת המומנטים

$$M_2 g r_2 = M_1 g r_1 \Rightarrow \frac{\mathrm{M}_2}{M_1} = \frac{r_1}{r_2}$$

ב' – נמצא את התאוצות של כל אחת מהמסות

$$M_2(g - a_2) r_2 - \mathrm{M}_1(g - a_1) r_1 = I\alpha$$

$$M_2(g - \alpha r_2) r_2 - \mathrm{M}_1(g + \alpha r_1) r_1 = I\alpha$$

נבודד את התאוצה הזוויתית

$$(M_2 r_2 - M_1 r_1) g = (I + M_2 r_2^2 + M_1 r_1^2)\alpha$$

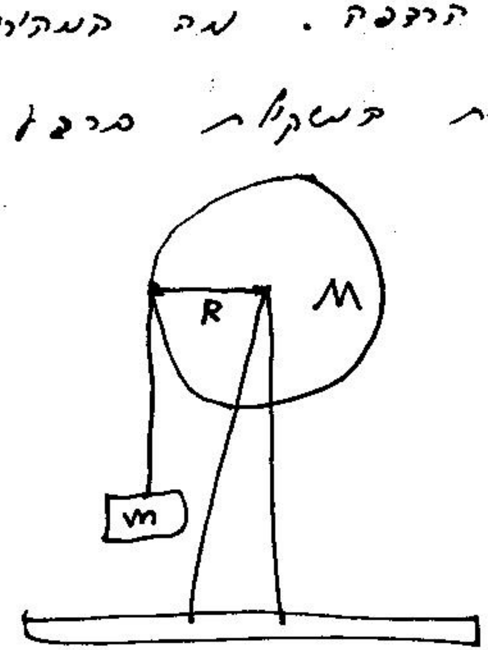
$$\alpha = \frac{(M_2 r_2 - M_1 r_1) g}{(I + M_2 r_2^2 + M_1 r_1^2)}$$

צריך לשים לב שאנחנו לא מחלקים ב-0 אבל במקרה הזה כל הגדלים חיוביים

ולבסוף התאוצות של כל אחד מהגופים יהיו

$$a_1 = -\frac{(M_2 r_2 - M_1 r_1) g}{(I + M_2 r_2^2 + M_1 r_1^2)} r_1, \qquad a_2 = \frac{(M_2 r_2 - M_1 r_1) g}{(I + M_2 r_2^2 + M_1 r_1^2)} r_2$$

דוגמא: חבל כרוך סביב גליל מלא במסה M ורדיוס R. הגליל מסתובב סביב ציר סיבוב אופקי ללא חיכוך.
בקצה החופשי של החבל קשורה מסה m שמשתחררת ממנוחה h מעל הרצפה. מה התאוצה הזוויתית של הגליל ומה מהירות המשקולת ברגע הנגיעה.



3//

~~[illegible]~~

האנרגיה נשמרת. בהתחלה האנרגיה היא פוטנציאלית.

$$U_i = mgh$$

האנרגיה הסופית היא קווית של המסה + קווית סיבובית.

$$U_f = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$2mgh = mv^2 + I\omega^2$$

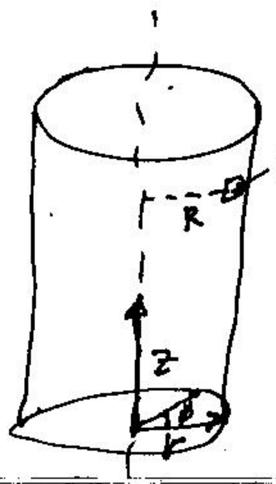
הקשר בין v ו ω הוא $\omega R = v$

$$2mgh = m\omega^2 R^2 + I\omega^2$$

$$2mgh = \omega^2 \left[mR^2 + I \right]$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2mgh}{\left[mR^2 + I \right]}}$$

יש למצוא את I של גליל



$$I = \int r^2 \, dm$$

נכתוב מסה dm דרך הצפיפות ונפח.

$$dm = \rho\, dv$$

$$dv = r\, dr\, d\phi\, dz$$ בקואורדינטות גליליות

$$dm = \rho \cdot r\, dr\, d\phi\, dz$$

$$I = \int r^2 \cdot \rho\, r\, dr\, d\phi\, dz$$

$$I = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^L dz\, r^3 \rho$$

$$I = \int_0^R dr\ r^3 \rho \cdot 2\pi \cdot L = \int_0^R 2\pi L \rho r^3\, dr$$

$$I = \frac{1}{4} 2\pi L \rho r^4 \Big|_0^R = \frac{1}{2} \pi L \rho R^4$$

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\pi R^2 \cdot L}$$ הצפיפות.

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} \cancel{\pi} \cancel{L} \frac{M}{\cancel{\pi} R^2 \cancel{L}} R^4 = \frac{1}{2} M R^2$$

לכן המהירות הזוויתית בסוף היא:

$$\omega = \sqrt{\frac{2mgh}{[MR^2 + I]}} = \sqrt{\frac{2mgh}{[mR^2 + \frac{1}{2}MR^2]}}$$

$$V = \omega R = \sqrt{\frac{2mgh}{m + \frac{1}{2}M}}$$

א. מהירות מרכז המסה:

אנרגיה קינטית של המוט היא אנרגיה סיבובית בלבד סביב קצהו

$$mg\frac{l}{2} = \frac{I_0\omega^2}{2}$$

$$v_{cm} = \omega\frac{l}{2}$$

ומומנט התמד של מוט שסובב סביב קצהו לפי משפט שטיינר

$$I_0 = \frac{ml^2}{12} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{3}$$

אחרי הצבה:

$$mg\frac{l}{2} = \frac{2}{3}m{v_{cm}}^2$$

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{3}{4}gl}$$

ב. תאוצה זוויתית של החוט:

$$\tau = I\alpha$$

$$\tau = mg\frac{l}{2} = \frac{1}{3}ml^2\alpha$$

$$\alpha = \frac{3}{2}\frac{g}{l}$$

ג. הרכיב האנכי של כוח הציר:

$$mg - F_y = ma_{cm} = m\alpha\frac{l}{2}$$

$$F_y = mg - m\frac{3}{4}g = \frac{mg}{4}$$

בהתנגשות נשמר תנע זוויתי ביחס לציר הסיבוב של המוט:

$$Mvl \sin\theta = [I_{cm} + Ml^2]\omega \tag{1}$$

$$I_{cm} = \frac{Mvl \sin\theta}{\omega} - Ml^2 \tag{2}$$