התנגשות אלסטית של גופים זהים במסתם

אין כוחות חיצוניים, ולכן התנע נשמר. בנוסף, נתון כי ההתנגשות אלסטית, כלומר גם האנרגיה נשמרת. קיבלנו שתי משוואות:

$$M\vec{V_0} = M\vec{V_1} + M\vec{V_2}$$
$$\frac{1}{2}M\vec{V_0}^2 = \frac{1}{2}M\vec{V_1}^2 + \frac{1}{2}M\vec{V_2}^2$$

נעלה את המשוואה הראשונה בריבוע (תוך כדי ביטול הM בשני האגפים):

$$\vec{V_0}^2 = \left(\vec{V_1} + \vec{V_2}\right)^2$$

נציב את התוצאה שקיבלנו במשוואת האנרגיה (תוך ביטול $\frac{M}{2}$ בשני האגפים):

$$\left(\vec{V_1} + \vec{V_2}\right)^2 = \vec{V_1}^2 + \vec{V_2}^2$$
$$\vec{V_1}^2 + \vec{V_2}^2 + 2\vec{V_1} \cdot \vec{V_2} = \vec{V_1}^2 + \vec{V_2}^2$$
$$\vec{V_1} \cdot \vec{V_2} = 0$$

בסעיף א, ההתנגשות חזיתית, כלומר הוקטורים באותו כיוון. האופציה היחידה לאיפוס היא אם $V_1 = 0$.
בסעיף ב, ההתנגשות אינה חזיתית. במצב הזה, כדי לאפס את $\vec{V_1} \cdot \vec{V_2}$, הוקטורים צריכים להיות מאונכים, כלומר בזווית של 90 מעלות. ($\vec{V_1} \cdot \vec{V_2} = |V_1||V_2|\cos(\theta)$)

קליפה וגלגלת

בדרך כלל (אבל ממש לא תמיד), אם שאלות מבקשות תאוצה, צריך לחשב כוחות. ואם הן מבקשות מהירות, הדרך היא אנרגיה. אם נקבע את גובה היחוס במיקום העכשווי של הקופסא הירוקה, אז בתחילת התנועה האנרגיה היא אפס. מכיוון שצירי הגלגלות לא זזים, הגלגלות אינן מבצעות עבודה (על אף שהן מפעילות כוח). אם כך האנרגיה אחרי גובה h צריכה להיות זהה לאנרגיה בתחילה, 0.

$$0 = -m_2gh + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2$$

העניין הוא שמכיוון שאין החלקה בגלגלות, יש קשר בין מהירותן הזוויתית לבין מהירות החבל:

$$\omega_1 \cdot R = v_2$$

וגם:

$$\omega_2 \cdot r_2 = v_2$$

לכן נוכל לרשום את משוואת שימור האנרגיה כך:

$$\begin{aligned}
2m_2gh &= m_2v_2^2 + I_1\left(\frac{v_2}{R}\right)^2 + I_2\left(\frac{v_2}{r_2}\right)^2 \\
2gh &= v_2^2 + \frac{I_1}{m_2R^2}v_2^2 + \frac{I_2}{m_2r_2^2}v_2^2 \\
v_2^2 &= \frac{2gh}{1 + \frac{I_1}{m_2R^2} + \frac{I_2}{m_2r_2^2}}
\end{aligned}$$

בשביל התאוצה, נצטרך לחשב כוחות ומומנטים. נסמן את החבל האנכי בT_2, ואת החבל האופקי בT_1. נרשום את החוק השני של ניוטון לשלושת הגופים. על הגוף הירוק נקבל:

$$m_2g - T_2 = m_2a_2$$

על הגלגלת הכחולה נחשב מומנטים, ונקבל:

$$T_2r_2 - T_1r_2 = I_2\alpha_2$$

ועל הקליפה האפורה:

$$T_1R = I_1\alpha_1$$

מכיוון שאין החלקה, והקשר בין המהירויות שמצאנו קודם נשמר תמיד, ניתן לגזור אותו ולקבל קשר בין התאוצות הזוויתיות לקוויות:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{a_2}{R} \\
\alpha_2 &= \frac{a_2}{r_2}
\end{aligned}$$

כך שסט המשוואות שקיבלנו מהחוק השני הוא:

$$\begin{aligned}
m_2g - T_2 &= m_2a_2 \\
T_2r_2 - T_1r_2 &= I_2\frac{a_2}{r_2} \\
T_1R &= I_1\frac{a_2}{R}
\end{aligned}$$

קצת סדר באלגברה:

$$m_2 g - T_2 = m_2 a_2 \tag{1}$$
$$T_2 - T_1 = I_2 \frac{a_2}{r_2^2} \tag{2}$$
$$T_1 = I_1 \frac{a_2}{R^2} \tag{3}$$

ועכשיו נחבר את שלושת המשוואות יחד:

$$m_2 g - T_2 + T_2 - T_1 + T_1 = m_2 a_2 + \frac{I_2}{r_2^2} a_2 + \frac{I_1}{R^2} a_2$$
$$a_2 = \frac{g}{1 + \frac{I_2}{m_2 r_2^2} + \frac{I_1}{m_2 R^2}}$$

וזו התאוצה. שימו לב שאם לגלגלות לא הייתה מסה, היינו מקבלים שהגוף נופל בתאוצה הכובד, אבל מכיוון שיש להן מסה הוא נופל לאט יותר.

בקשר למתיחויות, פשוט צריך לעבוד עם סט המשוואות שכבר היה לנו. המתיחות בחבל האופקי ניתנת על ידי משוואה (3)

$$T_1 = \frac{I_1}{R^2} a_2 = \frac{I_1}{R^2} \frac{g}{1 + \frac{I_2}{m_2 r_2^2} + \frac{I_1}{m_2 R^2}}$$

והחבל האנכי ממשוואה (1)

$$T_2 = m_2 g - m_2 a_2 = m_2 g - \frac{m_2 g}{1 + \frac{I_2}{m_2 r_2^2} + \frac{I_1}{m_2 R^2}} = \frac{m_2 g \left(\frac{I_2}{m_2 r_2^2} + \frac{I_1}{m_2 R^2} \right)}{1 + \frac{I_2}{m_2 r_2^2} + \frac{I_1}{m_2 R^2}}$$

בקשר למומנטי ההתמד, מומנט ההתמד של הקליפה הוא:

$$I_1 = \frac{2}{3} m_1 R^2$$

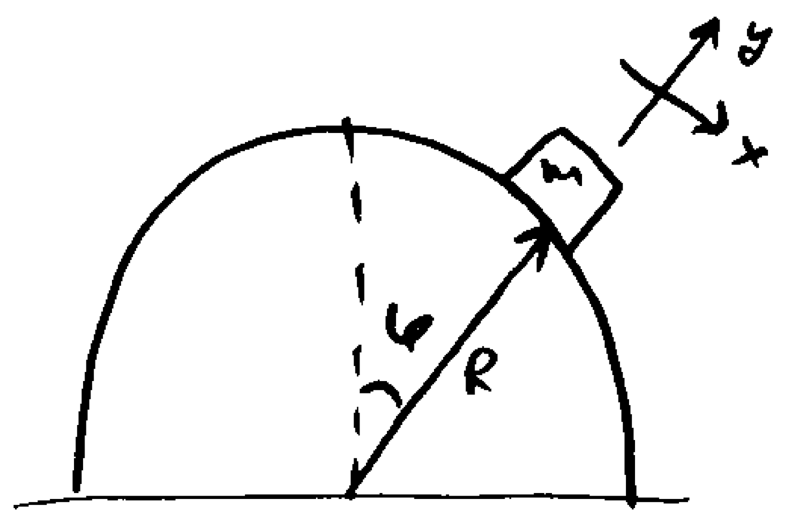
ואת מומנט ההתמד של הגלגלת נחבר מספר מומנטי התמד של דיסקאות:

$$I_2 = \frac{1}{2} m_3 r_3^2 + \frac{1}{2} m_3 r_3^2 + \frac{1}{2} m_3 r_2^2$$

3-ג:

א) אנו מחפשים את כח הנורמל שפועל על הגוף ולכן נעשה ניתוח כוחות על הגוף.

נבחר נקודה בה הגוף נמצא בזווית φ רק שנקבל ביטוי כללי המתאים לכל זווית.

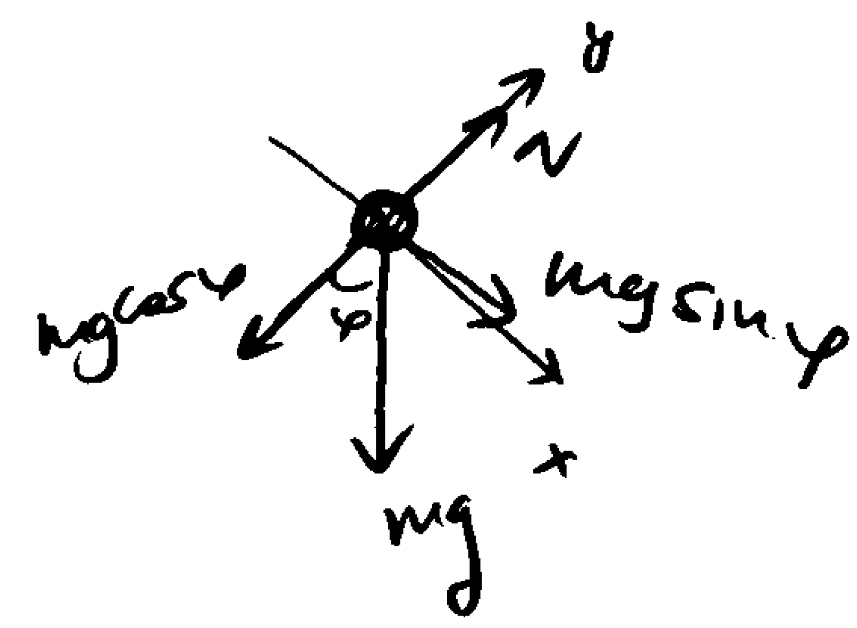


משוואות כוחות:

x:
$$mg\sin\varphi = ma_x$$

y:
$$N - mg\cos\varphi = ma_y$$

תרשים כוחות:



בגלל שהגוף עושה תנועה מעגלית אז יש לו תאוצה רדיאלית ולכן $a_y = \frac{v^2}{R}$

כלומר המשוואה עם הנורמל היא

$$N - mg\cos\varphi = m\frac{v^2}{R}$$

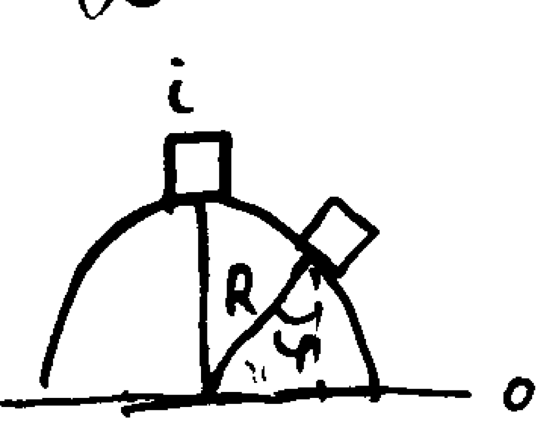
יש לנו משוואה עם 2 נעלמים, כלומר נרצה להביא את המהירות עבור זווית φ.
נוכל לעשות זאת בעזרת אנרגיות.

$$E_f - E_i = W_{n.c.}$$

מכיוון שהכח הלא משמר היחיד (הנורמל) לא עושה עבודה אז יש שימור אנרגיה בבעיה ולכן

$$E_f = E_i$$

נבחר את ההתחלה בתור נק' התחלת התנועה שלו ואת הסוף בנקודה בה הגוף נמצא בזווית φ.



$$E_i = mgR$$

$$E_f = \frac{1}{2}mv^2 + mgR\cos\varphi$$

$\Downarrow$

$$v^2 = 2gR(1-\cos\varphi)$$

כעת נציב את זה לתוך הביטוי של הכוחות ונקבל

$$N - mg\cos\varphi = m\,2g(1-\cos\varphi)$$

$$N = mg(2-3\cos\varphi)$$

הגוף ינתק מהמסילה כאשר הנורמל יתאפס ולכן $N=0$.

$$0 = mg(2-3\cos\varphi)$$

$$\Downarrow$$

$$\cos\varphi = \frac{2}{3}$$

ב.) כדי למצוא את התאוצה הזוויתית צריך למצוא את התאוצה המשיקית. זוהי התאוצה a_x.

$$a_x = a_t = \alpha R$$

ולכן

$$\alpha = \frac{a_x}{R} = \frac{g}{R}\sin\varphi$$

1_6600

$m = 30\ kg$ $M = 100\ kg$ $I = 150\ kg \cdot m^2$

$\tilde{m} = 1\ kg$ $R = 2\ m$

$V = 12\ m/s$ $\theta = 37°$

ג) $J_i = \tilde{m} V_\perp R = \tilde{m} V \cos 37\, R$

$J_f = (I + mR^2)\omega$

$J_i = J_f \Rightarrow (I + mR^2)\omega = \tilde{m} V \cos\theta\, R$

$$\omega = \frac{\tilde{m} V \cos\theta\, R}{I + mR^2} = \frac{1 \cdot 12 \cdot \cos 37 \cdot 2}{150 + 30 \cdot 4} = 0.07\ \frac{rad}{sec}$$

ד) $V = \omega R = 0.14\ m/s$