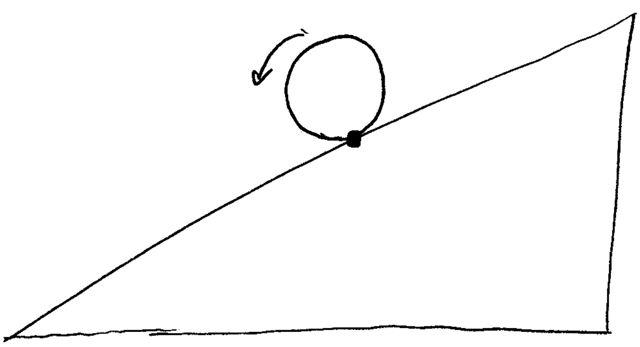
פתרון 1_6412

המשמעות של גלגול ללא החלקה היא שנקודות המגע בין הדיסקה והמדרון אינה נעה על המדרון. נקודות המגע משתנה בכל רגע ורגע.

מכאן שניתן להתייחס לתנועת הדיסקה בכל רגע ורגע כתנועה סיבובית סביב ציר שעובר בדיוק בנקודת המגע בין הדיסקה והמדרון.



מומנט ההתמד של דיסקה עבור ציר העובר דרך מרכז המסה הוא

$$I_{CM} = \frac{1}{2} m R^2$$

במקרה שלנו הציר עובר במרחק R ממרכז המסה, ולכן לפי חוק שטיינר

$$I = I_{CM} + MR^2 = \frac{1}{2} MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2} M R^2$$

הכח הפועל על הדיסקה בכיוון המקביל למדרון הינו $mg\sin\alpha$.

הכח פועל על כל אלמנט בגוף, אך לצרכי חישוב המומנט שמפעיל כח הכובד נרכז אותו לכדי כח הפועל על מרכז המסה.

מכיוון שאורך הזרוע של כח הכובד הינו R, ולכן המומנט הינו

$$\tau = R mg\sin\alpha$$

התאוצה הזוויתית α (לא להתבלבל עם הזווית α)
נתונה ע"י

$$\tau = I\alpha$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{MgR\sin\alpha}{\frac{3}{2}MR^2} = \frac{2}{3}\frac{g}{R}\sin\alpha$$

התאוצה המשיקית של מרכז המסה בכל רגע ורגע מתקבלת ע"י הכפלת התאוצה הזוויתית במרחק בין ציר הסיבוב לבין מרכז המסה, שהוא R. ולכן

$$a_{cm} = R\alpha = \frac{2}{3}g\sin\alpha$$

נחשב את המהירות שחייבת להיות לכדור בהגיעו לשיא הגובה על מנת שישלים סיבוב. נעשה זאת באמצעות שיקולי כוחות. בנקודת שיא הגובה:

$$\sum F_y = 0 = m\frac{v^2}{R} - mg - N \rightarrow N = m\left(\frac{v^2}{R} - g\right)$$

סיבוב שלם יושלם אם בנקודה הזו הנורמאל יהיה גדול מאפס, ולכן:

$$N = m\left(\frac{v^2}{R} - g\right) > 0 \rightarrow v^2 > gR$$

כעת, נחפש גובה שחרור שיניב מהירות שכזו בנקודה הקריטית. שיקולי שימור אנרגיה נותנים:

$$mgH = mg2R + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

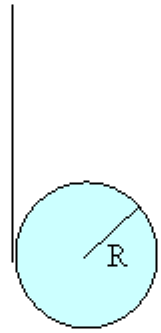
נשתמש בעובדה שאין החלקה כך ש- $\omega = v/r$ ונציב את מומנט ההתמד הנתון בבעיה:

$$mgH = 2mgR + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2\right)\left(\frac{v^2}{r^2}\right) = 2mgR + \frac{7}{10}mv^2$$

נבודד את המהירות ונדרוש את התנאי שקיבלנו מקודם:

$$v^2 = \frac{10g}{7}\left(H - 2R\right) > gR \rightarrow \boxed{H > \frac{27}{10}R}$$

פתרון תרגיל 6409_1:



משוואת כוחות:

$$\sum F_y = ma = mg - T$$

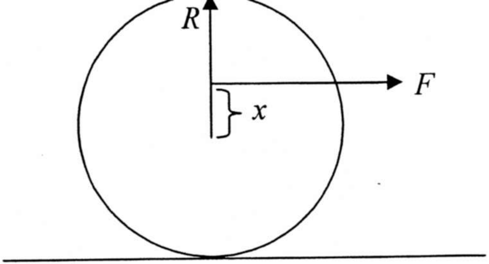
משוואת מומנטים סביב מרכז המסה (נבחר את כיוון השעון ככיוון חיובי):

$$\sum \tau = I\alpha = TR$$

נפתור שתי משוואות בשני נעלמים, יחד עם הקשר $a = \alpha R$ הנובע מהעובדה שהיויו מתגלגל ללא החלקה ונקבל לבסוף:

$$\boxed{T = \frac{mgI}{I + mR^2}; a = \frac{mgR^2}{I + mR^2}}$$

5.



נרשום משוואת כוחות ומומנטים בהנחה שהחיכוך בין הגליל למשטח התאפס:

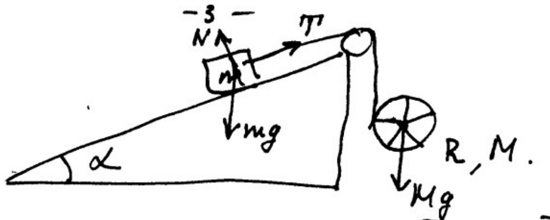
$$\sum F_x = F = ma$$

$$\sum \tau = F \cdot x = I\alpha$$

$$I = \frac{1}{2} mR^2 \quad , \quad \alpha = \frac{a}{R}$$

$$F \cdot x = \frac{1}{2} mR^2 \cdot \frac{a}{R} \quad \rightarrow \quad ma \cdot x = \frac{1}{2} maR \quad \rightarrow \quad x = \frac{R}{2}$$

.5



$$I_{cm} = 5 I_0$$ א)

$$I_0 = \left(\frac{M}{5}\right)\frac{R^2}{3} \; ; \; I_{cm} = \frac{MR^2}{3}.$$

$$MgR = I'\alpha$$ ב)

$$I' = I_{cm} + MR^2 = \frac{4}{3}MR^2$$

$$\alpha = \frac{MgR}{\frac{4}{3}MR^2} = \frac{3}{4}\frac{g}{R}$$

$$Mg - T = M a_{cm}$$ ג)

$$a_{cm} = \alpha R$$

$$Mg - T = M\frac{3}{4}\frac{g}{R}\cdot R \Rightarrow T = M\frac{1}{4}g$$

$$T = mg\sin\alpha \Rightarrow m = \frac{T}{g\sin\alpha} = \frac{1\,M}{4\sin\alpha}.$$

<u>תרגיל <1 6420></u>

נכתוב את משוואות התנועה עבור המסות התלויות ובנוסף את משוואת המומנטים עבור הדיסקה הכפולה

נבחר צירים כלפי מטה עבור כל אחת מהמסות

$$\sum F = ma$$

$$\mathrm{M}_1 g - T_1 = M_1 a_1 \ \ , M_2 g - T_2 = M_2 a_2$$

$$\mathrm{M}_1 (g - a_1) = T_1 \quad , \quad M_2 (g - a_2) = T_2$$

נבחר ציר סיבוב במרכז הדיסקות וכיוון חיובי נגד כיוון השעון

$$\sum \tau = I\alpha$$

$$\sum \tau = T_2 r_2 - T_1 r_1 = I\alpha$$

כאשר מומנט ההתמד הוא

$$I = \frac{1}{2}(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)$$

עדיין יש לנו יותר נעלמים ממשוואות ולכן נצטרך למצוא את האילוץ

האילוץ ינבע מכך שהתנועה של החוטים היא ללא החלקה ולכן נקבל

$$a_1 = -\alpha r_1, \qquad a_2 = \alpha r_2$$

כעת נוכל לפתור את מה שנתבקשנו

א' – המערכת בשיווי משקל ולכן כל התאוצות שוות ל-0

מכאן נקבל

$$\mathrm{M}_1 g = T_1 \ \ , M_2 g = T_2$$

נציב במשוואת המומנטים

$$M_2 g r_2 = M_1 g r_1 \Rightarrow \frac{\mathrm{M}_2}{M_1} = \frac{r_1}{r_2}$$

ב' – נמצא את התאוצות של כל אחת מהמסות

$$M_2 (g - a_2) r_2 - \mathrm{M}_1 (g - a_1) r_1 = I\alpha$$

$$M_2 (g - \alpha r_2) r_2 - \mathrm{M}_1 (g + \alpha r_1) r_1 = I\alpha$$

נבודד את התאוצה הזוויתית

$$(M_2 r_2 - M_1 r_1) g = (I + M_2 r_2^2 + M_1 r_1^2)\alpha$$

$$\alpha = \frac{(M_2 r_2 - M_1 r_1)g}{(I + M_2 r_2^2 + M_1 r_1^2)}$$

צריך לשים לב שאנחנו לא מחלקים ב-0 אבל במקרה הזה כל הגדלים חיוביים

ולבסוף התאוצות של כל אחד מהגופים יהיו

$$a_1 = -\frac{(M_2 r_2 - M_1 r_1)g}{(I + M_2 r_2^2 + M_1 r_1^2)} r_1, \qquad a_2 = \frac{(M_2 r_2 - M_1 r_1)g}{(I + M_2 r_2^2 + M_1 r_1^2)} r_2$$