פתרון:

נקבע את נקודת האפס של האנרגיה הפוטנציאלית בגובה H מתחת לתחילת התנועה של המסה ונרשום את שימור האנרגיה:

$$E_i = MgH$$
$$E_f = \frac{1}{2} I_{\text{sphere}}\omega^2_{\text{sphere}} + \frac{1}{2} I_{\text{cylinder}}\omega^2_{\text{cylinder}} + \frac{1}{2} Mv^2$$

נשים לב כי היות והתנועה היא ללא החלקה מתקיים:

$$v = \omega_{\text{sphere}} R_{\text{sphere}} = \omega_{\text{cylinder}} R_{\text{cylinder}}$$

נציב הכל ונפתור עבור המהירות:

$$MgH = \frac{1}{2} I_{\text{sphere}}\omega^2_{\text{sphere}} + \frac{1}{2} I_{\text{cylinder}}\omega^2_{\text{cylinder}} + \frac{1}{2} Mv^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{I_{\text{sphere}}}{R^2_{\text{sphere}}} + \frac{I_{\text{cylinder}}}{R^2_{\text{cylinder}}} + M\right)v^2$$

$$v^2 = \frac{2MgH}{\frac{I_{\text{sphere}}}{R^2_{\text{sphere}}} + \frac{I_{\text{cylinder}}}{R^2_{\text{cylinder}}} + M}$$

נציב $I_{\text{cylinder}} = \frac{1}{2} m_2 R^2_{\text{cylinder}}$ ו- $I_{\text{sphere}} = \frac{2}{5} m_1 R^2_{\text{sphere}}$ ונקבל לבסוף:

$$v^2 = \frac{2MgH}{\frac{2}{5} m_1 + \frac{1}{2} m_2 + M} = \boxed{\frac{20MgH}{4m_1 + 5m_2 + 10M}}$$

מומלץ לבדוק יחידות וגבולות שונים!

גליל חלול: א), ב)

$$MgH = \frac{I_{cm}\omega^2}{2} + \frac{MV_{cm}^2}{2}$$

$I_{cm} = MR^2$ גליל חלול:

$$V_{cm} = \omega R$$

$$MgH = \frac{MR^2 V_{cm}^2}{2R^2} + \frac{MV_{cm}^2}{2} = MV_{cm}^2$$

$$V_{cm} = \sqrt{gH} \qquad \omega = \frac{V_{cm}}{R} = \frac{\sqrt{gH}}{R}$$

ג)

$$E_{k0} = \frac{I_{cm}\omega^2}{2} + \frac{MV_{cm}^2}{2}$$

$$E_f = \frac{I_{cm}\omega^2}{2} + Mgh_{max}$$

$$\frac{I_{cm}\omega^2}{2} + \frac{MV_{cm}^2}{2} = \frac{I_{cm}\omega^2}{2} + Mgh_{max}$$

$$V_{cm}^2 = 2gh_{max}$$

$$h_{max} = \frac{V_{cm}^2}{2g} = \frac{H}{2}$$

גליל מלא:

$$I_{cm} = \frac{MR^2}{2}, \quad V_{cm} = \sqrt{\frac{4}{3}gH}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{4gH}{3R^2}}$$

$$h_{max} = \frac{2}{3}H$$