

(2) וקטורים ויזגיא

$$|A| = 12 \text{ [Newton]}$$

$$\alpha = 0 \text{ [rad]}$$

$$|B| = 20 \text{ [Newton]}$$

$$\beta = \pi \text{ [rad]}$$

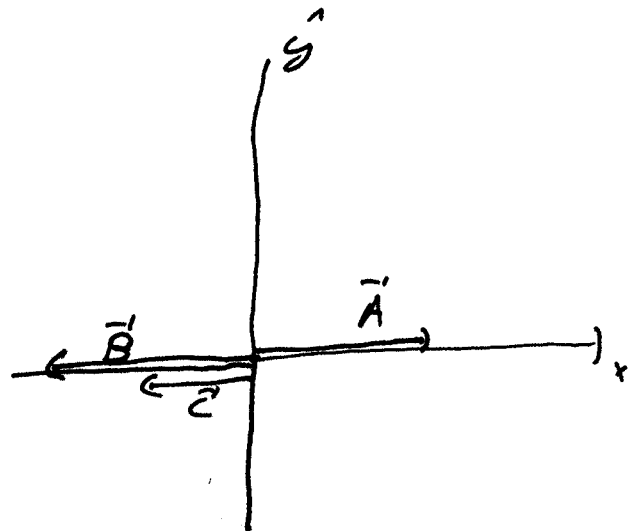
ב, A וקטורים ב כיוון כהגדרה α, β
כיוון \hat{x} ו-3/

$$A_x = |A| \cos \alpha = 12 \text{ [N]}$$

$$A_y = |A| \sin \alpha = 0 \text{ [N]}$$

$$B_x = |B| \cos \beta = -20 \text{ [N]}$$

$$B_y = |B| \sin \beta = 0 \text{ [N]}$$



$$C_x = A_x + B_x = -8 \text{ [N]}$$

$$C_y = 0$$

$$\vec{C} = -8 \hat{x} \text{ [N]}$$

$$|C| = \sqrt{8^2 + 0} = 8 \text{ [N]}$$

\vec{C} וקטור ב כיוון \hat{x} ו-3/

~~הקטור \vec{C} הוא כיוון \hat{x} ו-3/~~

$\beta = \pi \text{ [rad]}$ כיוון \hat{x} ו-3/ \vec{C} הוא כיוון \hat{x} ו-3/

$$[N] = \frac{\text{kg} \cdot \text{meter}}{\text{sec}^2} = \frac{1000 [\text{gram}] \cdot 100 [\text{cm}]}{\text{sec}^2} \quad (2)$$

$$= 10^5 \frac{\text{gram} \cdot \text{cm}}{\text{sec}^2} = 10^5 \text{ [Dyne]}$$

$$|C| = 8 \cdot 10^5 \text{ [Dyne]}$$

חלקיק בעולם התלת מימדי

הביטוי למיקום הוא :

$$\vec{r}(t) = A\hat{i} + Bt^2\hat{j} + Ct\hat{k}$$

המהירות היא:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = 0 + 2Bt\hat{j} + C\hat{k}$$

התאוצה:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = 0 + 2B\hat{j} + 0$$

המיקום בציר x הוא קבוע. בציר y יש תאוצה קבועה, ובציר z מהירות קבועה. הצורה של מסלול כזה היא פרבולה בצירי y ו z .

קליעה לחישוק

נסמן:

$$v_0 = 10.8 \frac{m}{s}$$

$$g = 9.8 \frac{m}{s^2}$$

$$h = 4.9m$$

$$u = 9.1 \frac{m}{s}$$

נבחר מערכת קואורדינטות, אשר הראשית שלה בנקודת הזריקה, ציר x ימינה, וציר y כלפי מעלה. נרשום במערכת זו את נקודת הזריקה והמהירות ההתחלתית:

$$\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_0 \cos \alpha + u \\ v_0 \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

במציאת המהירות ההתחלתית התחשבנו בכך שמהירות הכדור ניתנה לנו ביחס לאדם הזורק, ובנוסף פירקנו את המהירות לרכיבים כמקובל. מרגע העזיבה, התנועה היא בתאוצה קבועה, ולכן:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a} t^2}{2} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_0 \cos \alpha + u \\ v_0 \sin \alpha \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \frac{t^2}{2} \\ \vec{v}(t) &= \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} v_0 \cos \alpha + u \\ v_0 \sin \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} t \end{aligned}$$

ביקשו מאיתנו את המרחק האופקי עד הזריקה, אבל על מנת לקבלו אנחנו נדרשים לחשב את הזווית α ואת הזמן עד הפגיעה בחישוק. הדרישה היא שהחישוק יעבור בגובה מסוים, ובאופן אופקי. הכוונה באופקי היא שהמהירות בציר y היא אפס. נשארנו עם שתי משוואות וקטוריות:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t_1) &= \begin{pmatrix} v_0 \cos \alpha + u \\ v_0 \sin \alpha \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \frac{t_1^2}{2} = \begin{pmatrix} x_1 \\ h \end{pmatrix} \\ \vec{v}(t_1) &= \begin{pmatrix} v_0 \cos \alpha + u \\ v_0 \sin \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} t_1 = \begin{pmatrix} v_0 \cos \alpha + u \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

נציב את $v_0 \sin \alpha$ מהמשוואה של המהירות במשוואה של המיקום לקבלת:

$$gt_1^2 - g \frac{t_1^2}{2} = h$$

$$t_1 = \pm \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$\sin \alpha = \frac{gt_1}{v_0} = \sqrt{\frac{2hg}{v_0^2}}$$

$$x_1 = (v_0 \cos \alpha + u)t_1 = u \sqrt{\frac{2h}{g}} + v_0 \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} t_1 = u \sqrt{\frac{2h}{g}} + v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} \sqrt{1 - \frac{2hg}{v_0^2}} \approx 13.64m$$

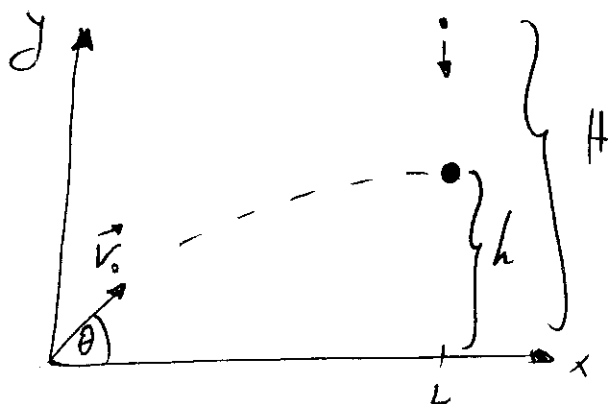
גוף נופל בגובה מסוים מתחתה מקובה בגובה H. כדור שגובהו מתחיל לרדת נצטרף אליו שני מקובות.

שני הגופים מתנגשים בגובה h מתחת הקרקע. המרחק האופקי בין הגופים הוא L.

- (1) באיזו זווית מתחיל הגוף לרדת? השתמשו ב-
- (2) באיזו מהירות? השתמשו ב-
- (3) מהי מהירותו הסיבובית של הגוף השני ביחס לנקודת המפגש?

פתרון:

* נגד כוח הכבידה משוואות התנועה עבור 2 הגופים וואתרי מרחק נביה את גובה המפגש h במרחק L



I גוף 1: $y(t) = H - \frac{1}{2}gt^2$

$x(t) = L$

II גוף 2: $y(t) = v_0 \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$

$x(t) = v_0 \cos \theta \cdot t$

* נגד כוח הכבידה משוואות התנועה עבור 2 הגופים וואתרי מרחק נביה את גובה המפגש h במרחק L

$h = H - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}} = \tilde{t}$

* ידוע כי בזמן \tilde{t} גוף II נמצא בגובה h מתחת הקרקע. לכן:

(I) $L = v_0 \cos \theta \cdot \tilde{t}$

(II) $h = v_0 \sin \theta \cdot \tilde{t} - \frac{1}{2}g\tilde{t}^2 \Rightarrow v_0 \sin \theta \cdot \tilde{t} = h + \frac{1}{2}g\tilde{t}^2$

הקשר בין I ו-II

$$\tan \theta = \frac{h + \frac{1}{2} g \tilde{t}^2}{L}$$

$$\tan \theta = \frac{h + \frac{1}{2} g \cdot \frac{2(H-h)}{g}}{L} = \frac{H}{L} \Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{H}{L}\right)$$

I) מהירות הנפילה V_0

$$\left(1 + \tan^2 \theta = 1 + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}\right) \text{ I}$$

II) מהירות הנפילה V_0 (הקשר בין I ו-II)

$$L = V_0 \cos \theta \cdot \tilde{t} \Rightarrow V_0 \cos \theta = \frac{L}{\tilde{t}}$$

$$= \frac{L}{\frac{2(H-h)}{g}} = \frac{Lg}{2(H-h)}$$

$$V_0 \sin \theta = \frac{L}{\tilde{t}} \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{L}{\tilde{t}} \tan \theta = \frac{L}{\frac{2(H-h)}{g}} \cdot \frac{H}{L} = \frac{Hg}{2(H-h)}$$

$$|\vec{V}_0| = \sqrt{\left[\frac{Lg}{2(H-h)}\right]^2 + \left[\frac{Hg}{2(H-h)}\right]^2} = \frac{g}{2(H-h)} \sqrt{L^2 + H^2}$$

$$V_{1y} = -gt, \quad V_{1x} = 0$$

$$V_{2y} = V_0 \sin \theta - gt, \quad V_{2x} = V_0 \cos \theta$$

$$\vec{V}_{rel} = (V_{2x} - V_{1x}, \overset{\downarrow}{V_{2y} - V_{1y}}) =$$

~~$$= (V_0 \cos \theta - 0, V_0 \sin \theta - gt - (-gt)) =$$~~

$$\vec{V}_{rel} = (V_0 \cos \theta, V_0 \sin \theta)$$

שאלה 1_2227 - זריקת תיק

2013

סטודנט להנדסת חשמל הגיע ראשון לכיתה לפני הרצאה חשובה במטרה לתפוס כסא באחת השורות הראשונות. לצערו הוא מגלה שסטודנטים רבים חוסמים את המעבר בדרך החוצה. הוא מחליט לזרוק את התיק שלו מעל הסטודנטים, המרוחקים ממנו מרחק L וגבוהים ממנו בגובה γL , על מנת לפגוע בשורות הראשונות. חשבו מהי המהירות (גודל v_0 וזווית θ) כך שהתיק כמעט ופוגע בראשי הסטודנטים כשהוא מצוי בשיא הגובה.

פתרון

נבחר את הראשית להיות הנקודה ממנה זרק הסטודנט את התיק. בכיוון האופקי יש לנו תנועה קצובה (מהירות קבועה) ובכיוון האנכי תנועה בתאוצה קבועה:

$$\begin{aligned}v_x &= v_{0x} = v_0 \cos \theta \\x &= x_0 + v_{0x}t = v_0 \cos \theta t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_y &= -g \\v_y &= v_{0y} + a_y t = v_0 \sin \theta - gt \\y &= y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2}gt^2\end{aligned}$$

התיק כמעט ופוגע בראשי הסטודנטים, כלומר הנקודה $(L, \gamma L)$ מופיעה במסלול, ובנוסף המהירות בכיוון y בדיוק מעל ראשיהם שווה אפס:

$$\begin{aligned}v_y &= 0 = v_0 \sin \theta - gt \\y &= \gamma L = v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2}gt^2 \\x &= L = v_0 \cos \theta t\end{aligned}$$

יש לנו 3 משוואות ו-3 נעלמים θ , v_0 ו- t ולכן אנו מסוגלים לפתור את מערכת המשוואות.

$$\begin{aligned}v_0 \sin \theta &= gt \\t &= \frac{L}{v_0 \cos \theta}\end{aligned}$$

נציב במשוואה של y :

$$\begin{aligned}\gamma L &= gt^2 - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}gt \cdot t = \frac{1}{2}v_0 \sin \theta \frac{L}{v_0 \cos \theta} = \frac{L}{2} \tan \theta \\ \theta &= \arctan(2\gamma)\end{aligned}$$

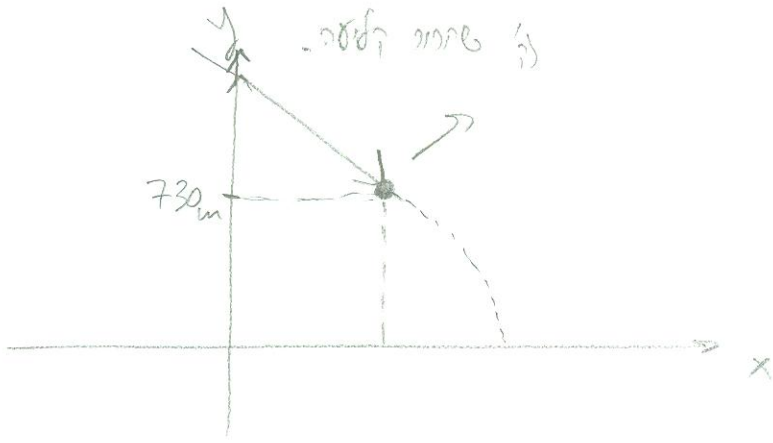
נמצא כעת את גודל המהירות v_0 :

$$\begin{aligned}0 &= v_0 \sin \theta - \frac{gL}{v_0 \cos \theta} \\ 0 &= v_0^2 \sin^2 \theta - gL \tan \theta \\ v_0^2 &= \frac{gL \tan \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{gL \tan \theta}{1 - \cos^2 \theta}\end{aligned}$$

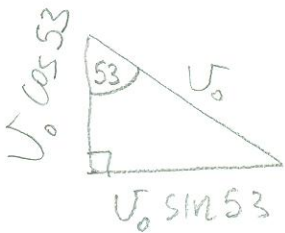
נעזר בזוהות הטריגונומטרית:

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta}$$

$$\begin{aligned}v_0^2 &= \frac{gL \tan \theta}{1 - \frac{1}{1 + \tan^2 \theta}} = \frac{gL \tan \theta}{\frac{\tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta}} = \frac{gL}{\tan \theta} (1 + \tan^2 \theta) \\ &= \frac{gL}{2\gamma} (1 + 4\gamma^2) = gL \left(\frac{1}{2\gamma} + 2\gamma \right) \\ v_0 &= \sqrt{gL \left(\frac{1}{2\gamma} + 2\gamma \right)}\end{aligned}$$



א. למצוא מהירות הנפילה V_{0x} (רכיב אופקי) ו- V_{0y} (רכיב אנכי)



$$V_{0x} = V_0 \sin 53$$

$$V_{0y} = V_0 \cos 53$$

הנפילה נעשית תחת השפעת כוח הכובד, הנפילה היא תנועה אחידה מואצת. המהירות האופקית נשארת קבועה, המהירות האנכית יורדת בצורה ליניארית. נקודת הנפילה היא הנקודה בה המהירות האנכית שווה לאפס. נקודת הנפילה היא הנקודה בה המהירות האנכית שווה לאפס.

$$y = y_0 + V_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

$$= y_0 - (V_0 \cos 53)t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$0 = 730 - (V_0 \cos 53) \cdot 5 - 5(25) \quad , \quad g \approx 10 \frac{[m]}{[s^2]}$$

$$V_0 = \frac{121}{\cos 53} = 201.05 \frac{[m]}{[s]}$$

מהירות הנפילה \rightarrow מהירות הנפילה

$$X = X_0 + V_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

$$a_x = 0, V_{0x} = V_0 \sin 53, X_0 = 0$$

$$X = (V_0 \sin 53)t = 201.05 \cdot \sin 53 \cdot 5 = 802.8 \text{ [m]}$$

$$V_y = -V_{0y} - a_y t = -V_0 \cos 53 - g t = -171 \text{ [m/s]}$$

$$V_x = V_{0x} = V_0 \sin 53 = 160.56 \text{ [m/s]}$$

$$t = 5 \text{ [s]}$$

$$V_0 = 201.05 \text{ [m/s]}$$

יש להוסיף את הרכיב האנכי של המהירות
האנכי של המהירות הוא -171 m/s
האנכי של המהירות הוא 160.56 m/s