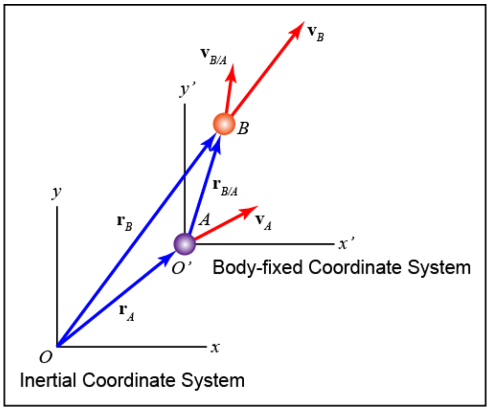
תרגול 6 – תנועה יחסית ותנועה מעגלית

<u>תנועה יחסית ומהירות יחסית (גליליי)</u>:



במקרה בו שתי מערכות מתארות גוף, כאשר מערכת S נמצאת במנוחה ו’S נעה במהירות $\vec{v}_A$ (במקרה מערכת שנעה עם אדם שרץ במהירות קבועה). מיקום הכדור B במערכת S הוא $\vec{r}_B$ ומיקום האדם ההולך $\vec{r}_A = \vec{v}_A t$

מיקום הכדור B כמו שהרץ רואה אותו הוא $\vec{r}_{B/A} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \vec{r}_B - \vec{v}_A t$

אם נרצה לחשב את המהירות היחסית בין הגופים, נגזור לפי הזמן:

$$\vec{v}_{B/A} = \frac{d\vec{r}_{B/A}}{dt} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$$

כלומר שהקשר בין המהירות בין מהירות הכדור שנראית במערכת המנוחה $\vec{v}_B$ לבין מהירות הכדור הנראית במערכת הנעה $\vec{v}_{B/A}$ הוא חיבור של האחרון ל$\vec{v}_A$, המהירות היחסית אין המערכות.

אם נרצה למצוא את הקשר בין התאוצות, נגזור שוב לפי הזמן. (נזכור ש$\vec{v}_A$ קבוע בזמן ונקבל).

$$\vec{a}_{B/A} = \vec{a}_B$$

חשוב לשים לב שהנוסחאות נכונות עבור מערכות אינרציאליות, כלומר מערכות הנעות במהירות קבועה.

<u>תנועה מעגלית</u>:

תנועה במסלול בעל רדיוס (מרחק) קבוע מנקודה כלשהיא.

עבור תנועה ברדיוס R, ניתן לכתוב את מיקום הגוף במרחק R ובזווית θ מציר $\hat{x}$.

מיקום הגוף:

$$\vec{r} = (r_x, r_y) = (R\cos\theta, R\sin\theta) = R(\cos\theta, \sin\theta) = R\hat{r}$$

אם גוף נע במעגל, הזווית θ משתנה עם הזמן, והנגזרת שלה מוגדרת להיות $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$, זוהי המהירות הזוויתית (.

אם נרצה לחשב את המהירות שהגוף נע בו.

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=R\frac{d}{dt}(\cos\theta\,,\sin\theta)=R\left(-\dot{\theta}\sin\theta\,,\dot{\theta}\cos\theta\right)=R\dot{\theta}(-\sin\theta\,,\cos\theta)=R\dot{\theta}\hat{\theta}$$

גודל המהירות הוא $v=R\dot{\theta}$

והתאוצה:

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=R\frac{d}{dt}\dot{\theta}(-\sin\theta\,,\cos\theta)+R\dot{\theta}\frac{d}{dt}(-\sin\theta\,,\cos\theta)=R\ddot{\theta}(-\sin\theta\,,\cos\theta)-R\dot{\theta}^2(\cos\theta\,,\sin\theta)$$
$$=R\ddot{\theta}\hat{\theta}-R\dot{\theta}^2\hat{r}$$

<u>תאוצה רדיאלית</u>: מאונכת למהירות.

$$a_{rad}=R\dot{\theta}^2=\frac{v^2}{R}$$

<u>תאוצה משיקית</u>: מקבילה למהירות

$$a_{tan}=R\ddot{\theta}=\frac{dv}{dt}$$

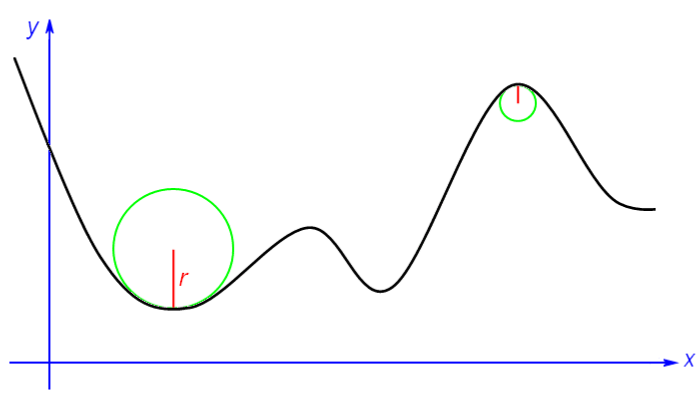
<u>מהירות זוויתית</u> : $\omega=\frac{d\theta}{dt}$

<u>מהירות</u>: $v=\omega R$

<u>תאוצה זוויתית</u>: $\alpha=\frac{d\omega}{dt}$

$$\alpha=\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

<u>רדיוס העקמומיות</u> הוא רדיוס המעגל התואם את המסלול בנקודה מסוימת. כלומר בנקודה מסוימת ניתן להתייחס לתנועה כתנועה מעגלית.



<u>שאלה 1 <1_2402></u>

נתון: $v = 0.75\frac{m}{s}$, $\varphi = 38°$

נגדיר ציר y כלפי מעלה וציר x ימינה. $\vec{v}_A$ היא מהירות הבת ו$\vec{v}_B$ היא מהירות המוכר.

נבטא כל מהירות לפי רכיביה בצירים השונים:

$$\vec{v}_B = (v\cos\varphi\,, v\sin\varphi)$$

$$\vec{v}_A = (v\cos\varphi\,, -v\sin\varphi)$$

המהירות היחסית של המוכר (B) ביחס לבתו (A):

$$\vec{v}_{BA} = \vec{v}_B - \vec{v}_A = (0{,}2v\sin\varphi) = 2\cdot 0.75\cdot \sin 38°\frac{m}{s} = 0.92\frac{m}{s}$$

המשמעות, מבחינת הבת האב עולה כלפי מעלה.

שאלה 2 <1_2500>

נתון חלקיק שנע במעגל בעל רדיוס R בתאוצה משיקית $a_t = const$ וללא מהירות התחלתית.

א.

$$a_t = \frac{dv}{dt} \rightarrow \int_{v_o}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a_t\, dt$$

$$v - v_0 = a_t(t - t_0) \rightarrow v = a_t t$$

$$a_r = \frac{v^2}{R} = \frac{a_t^2}{R} t^2$$

ב. בתנועה מעגלית $v = \omega R$ וכמו כן $v = a_t t$ כך ש:

$$v = a_t t = \omega R = \frac{d\theta}{dt} R$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{a_t}{R} t \rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{0}^{t} \frac{a_t}{R} t\, dt$$

$$\theta(t) = \frac{a_t t^2}{2R} \rightarrow t^2 = \frac{2R\theta}{a_t}$$

מהסעיף הקודם נציב את הקשר האחרון שקיבלנו: $a_r = \frac{a_t^2}{R} \frac{2R\theta}{a_t} = 2a_t\theta$

שאלה 3 <2509_1>

מהירות הרכבת הממוצע : $v_{avg} = 200\frac{m}{s}$ ותאוצה רדיאלית מקסימלית $a_{r,max} = 0.1\ g$

$$a_r = \frac{v^2}{R}$$

א.

$$R = \frac{v^2}{a_r}$$

עבור מהירות נתונה, רדיוס עקמומיות מינימלי יתקבל עבור תאוצה ניצבת מקסימלית:

$$R_{min} = \frac{v_{avg}^2}{a_{r,max}} = \frac{200^2}{0.1 \cdot 10} = 40000\ m = 40\ km$$

ב. $v^2 = a_r R$ כלומר שמהירות מקסימלית תתקבל עבור תאוצה ניצבת מקסימלית. $R = 1km = 1000\ m$

$$v_{max} = \sqrt{a_{r,max}R} = \sqrt{0.1 \cdot 10 \cdot 1000} = \sqrt{1000} = 10\sqrt{10} = 31.62\frac{m}{s}$$

מדרגות נעות

הכלל לקביעת מהירות יחסית הוא: $\vec{v}_{rel}=\vec{v}-\vec{v}_{sys}$
כאשר $\vec{v}_{sys}$ היא מהירות המערכת שביחס אליה מחשבים.
נסמן את נתוני השאלה כך:

- $v=0.75\frac{m}{s}$ היא גודלה של המהירות.
- $\alpha=38^{o}$ זו זווית המדרגות הנעות ביחס לאופק.

נרשום את שתי המהירויות באותה מערכת קואורדינטות. בחרנו במערכת בה y חיובי כלפי מעלה, וx חיובי ימינה. לכן המהירויות יהיו:

$$\vec{v}_{father}=v\begin{pmatrix}\cos(\alpha)\\ \sin(\alpha)\end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_{daughter}=v\begin{pmatrix}\cos(\alpha)\\ -\sin(\alpha)\end{pmatrix}$$

המהירות של המוכר ביחס לביתו היא אם כן:

$$\vec{v}_{relative}=\vec{v}_{father}-\vec{v}_{daughter}=v\begin{pmatrix}\cos(\alpha)\\ \sin(\alpha)\end{pmatrix}-v\begin{pmatrix}\cos(\alpha)\\ -\sin(\alpha)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 2v\sin(\alpha)\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}0\\ 0.9\frac{m}{s}\end{pmatrix}$$

כלומר, מבחינת הבת האב רק עולה מעלה.

<u>תרגיל כיתה 2-1</u>

א.) נתון a_t, אז מתוך הגדרת התאוצה

$$\vec{a} = \underbrace{\dot{v}\hat{v}}_{\vec{a}_t} + v\dot{\hat{v}}$$

אז

$$\dot{v} = a_t$$

$$\Downarrow$$

$$v - \cancel{v_0}^{0} = a_t \cdot t$$

נתון כי
שווה אפס.

נציב לתוך הביטוי של התאוצה הרדיאלית

$$a_r = \frac{v^2}{R} = \frac{a_t^2}{R} \cdot t^2$$

ב.) בתנועה מעגלית יש קשר בין המהירות הזוויתית ($\dot{\varphi}$) והמהירות הקווית.

$$\vec{V} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\varphi}\hat{\varphi}$$

מכיוון שהתנועה על מעגל היא $\rho = R$ אז $\dot{\rho} = 0$ כלומר

$$V = R\dot{\varphi}$$

נציב את המהירות

$$a_t t = R\frac{d\varphi}{dt}$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi = \frac{1}{2}\frac{a_t}{R}t^2$$

נציב לביטוי שמצאנו בסעיף א' ונקבל

$$a_r = 2a_t \cdot \varphi.$$

חלקיק במעגל:

<1 _ 2502>

נזכר כי אם בהצגה פולרית

וקטור המיקום הינו $\vec{r}_{pol} = (R,\theta)$

הרי שבהצגה קרטזית:

$$\vec{r}_{cart} = (R\cos(\theta), R\sin(\theta))$$

כאשר הזווית θ הינה הזווית בין וקטור המיקום לציר ה-$\hat{x}$.

כזכור לנו, בתנועה מעגלית טהורה R אינו משתנה ולכן המיקום תלוי לחלוטין ב-$\theta(t)$ כלומר בזווית כפונקציה של הזמן.

בתרגול ראינו שהמהירות המשיקית V_θ הינה המהירות: $\vec{V} = V_\theta \cdot \hat{\theta} + 0 \cdot \hat{r}$

כמו כן אנו יודעים כי במקרה כזה:

$$V = \omega \cdot R$$

כאשר ω מוגדרת להיות $\omega \equiv \dot{\theta}$, זוהי המהירות הזוויתית, או קצב שינוי הזווית על המעגל.

$\Leftarrow$

$$\omega = \frac{V}{R}$$

ובנתוני השאלה:

$$V = At^2$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{At^2}{R}$$

אם $\dot{\theta} = \omega$ הרי ש: $\int_{t_0}^{t_{now}} \omega \, dt = \theta(t_{now}) - \varphi$

כאשר $\varphi = \theta(t_0) = \theta_0$.

$$\Theta = \int \omega\, dt = \int \frac{At^2}{R}\, dt = \frac{At^3}{3R}$$:אם כן

$$\vec{r} = \left(R\cos\left(\frac{At^3}{3R} + \tilde{\varphi}\right),\ R\sin\left(\frac{At^3}{3R} + \tilde{\varphi}\right)\right)$$:אם כן

בקואורדינטות קרטזיות.

כאשר φ מוגדר להיות הזווית ממנו התחילה התנועה, בשפה אחרת:

$$\vec{r}_{(t=0)} = \left(+R\cos(\tilde{\varphi}),\ +R\sin(\tilde{\varphi})\right)$$

רכבת מהירה נעה במהירות של $200 \frac{m}{s}$, למען

נוחות הנוסעים נדרש שהתאוצה הניצבת

לתנועה לא תעלה על $0.1g$.

(i) מצאו את רדיוס העקמומיות המקסימלי עבור הרכבת כשהיא נעה במהירות המוצעת.

(ii) מה מהירותה המקסימלית בסיבוב שרדיוסו $1km$?

(i) רדיוס העקמומיות: $R = \frac{|V|^2}{|a_R|} = \frac{\left(200\left(\frac{m}{s}\right)\right)^2}{0.1 \cdot 10\left(\frac{m}{s^2}\right)}$

$$\boxed{R_{max} = 40{,}000(m) = 40 km}$$

בדיקת יחידות: $\left[\frac{m^{\cancel{2}}}{\cancel{s^2}} \cdot \frac{\cancel{s^2}}{\cancel{m}}\right] = (m)$

(ii) $|V|^2 = R \cdot |a_R| = 1{,}000(m) \cdot 0.1 \cdot 10\left(\frac{m}{s^2}\right)$

$$= 1{,}000 \left(\frac{m}{s}\right)^2$$

$$\boxed{V_{max} = 31.6 \left(\frac{m}{s}\right)}$$