גוף שמסתו m נע לאורך ציר x בהשפעת הכח $\vec{F}=-\alpha x^2\hat{x}$ כאשר קבוע $\alpha>0$

נתון כי ברגע $t=0$ מיקום הגוף $x(0)=x_i$ ו- $v(0)=v_i$ $\quad v_i>0$

א) מהי העבודה שמבצע הכח $\vec{F}$ על המסה מנק' x_i לנק' x_f ; $x_f>x_i$

ב) רשמו את האנרגיה המכנית הכוללת של הגוף.

ג) מהי הנקודה הרחוקה ביותר מהראשית אליה יגיע הגוף?

$$W=\int_{x_i}^{x_f}\vec{F}\cdot d\vec{s}=-\alpha\int_{x_i}^{x_f}x^2\,dx=-\frac{\alpha}{3}\left(x_f^3-x_i^3\right)=\frac{\alpha}{3}\left(x_i^3-x_f^3\right)$$

ב) משפט העבודה והאנרגיה $\quad W_{i\to f}=E_{k_f}-E_{k_i}$

$$\frac{\alpha}{3}x_i^3-\frac{\alpha}{3}x_f^3=\frac{1}{2}mv_f^2-\frac{1}{2}mv_i^2$$

$$\frac{\alpha}{3}x_i^3+\frac{1}{2}mv_i^2=\frac{1}{2}mv_f^2+\frac{\alpha}{3}x_f^3=const=E=\frac{1}{2}mv^2+\frac{\alpha}{3}x^3$$

באותה מידה יכולנו לקבל $\quad F=-\frac{dU}{dx}\Rightarrow U=-\int F\,dx=\frac{\alpha}{3}x^3$

ג) עבור הנק' הרחוקה ביותר $v_f=0$

$$\frac{\alpha}{3}x_i^3+\frac{1}{2}mv_i^2=\frac{\alpha}{3}x_f^3$$

$$x_f=\left(x_i^3+\frac{3m}{2\alpha}v_i^2\right)^{\frac{1}{3}}$$

חוט ומסמר

הכוחות הפועלים על המסה הם רק הכובד והמתיחות. בבעיה שלפנינו המתיחות תמיד ניצבת לתנועה ולכן היא אינה עושה עבודה. אם כן, יש שימור אנרגיה מכנית. נקבע את גובה האפס ($h_0 = 0$) בנקודת ההתחלה של התנועה. האנרגיה בהתחלה היא:

$$E_i = K_i + U_i = 0$$

כשהחוט בזווית α, הגוף נמצא בגובה:

$$h_1 = \frac{L}{2}(\cos\alpha - 1)$$

לכן האנרגיה המכנית בסוף היא:

$$E_f = K_f + U_f = \frac{mv_1^2}{2} + mg\frac{L}{2}(\cos\alpha - 1)$$

כמו שאמרנו קודם לא נעשית עבודה אחרת ולכן האנרגיה נשמרת, ונקבל:

$$E_i = E_f$$
$$0 = \frac{mv_1^2}{2} + mg\frac{L}{2}(\cos\alpha - 1)$$
$$v_1^2 = gL(1 - \cos\alpha)$$

בסעיף הבא שואלים לגבי המתיחות. בחלק הזה של השאלה, התאוצה הרדיאלית צריכה להיות שווה ל:

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{L/2} = 2\frac{v^2}{L}$$

הכוחות ברכיב הרדיאלי הם:

$$T + mg\cos\alpha$$

ולכן:

$$T + mg\cos\alpha = 2m\frac{v^2}{L}$$
$$\frac{T}{m} = 2\frac{v^2}{L} - g\cos\alpha = 2g(1-\cos\alpha) - g\cos\alpha = g(2 - 3\cos\alpha)$$

כאשר הצבנו בדרך את המהירות בזווית תטא שמצאנו בפרק הקודם. מכאן אנחנו מקבלים שכשהמתיחות מתאפסת, הקוסינוס שווה $\frac{2}{3}$.

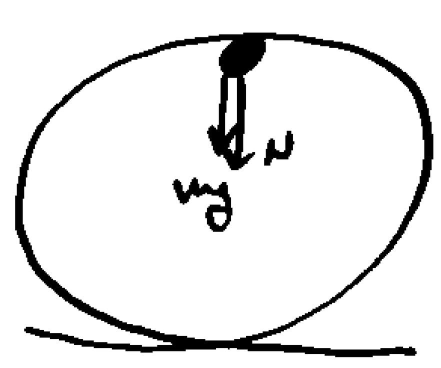
תרגיל 21-4137

נעדה להשתמש במשפט עבודה-אנרגיה מכני-

$$E_f - E_i = W_{N.C.F}$$

בגלל העלייה קיימים כוחות לא משמרים בתרגיל אבל זה לא מפריע לשימוש במשפט עבודה-אנרגיה מכנית.

כדי שהגוף יעשה תנועה מעגלית — נקודה נדרוש שבנק' העליונה ביותר הגוף עדיין יגע במסלול כלומר $N\neq0$. נרשום את משוואת הכוחות—



$$N + mg = m\frac{v^2}{R} \rightarrow N = m\left(\frac{v^2}{R} - g\right) > 0$$

$$v^2 > gR \rightarrow v_c^2 = gR$$

כלומר כדי לסיים סיבוב חייב להיות לפחות v_c בנק' העליונה ביותר. נרשום 2 משוואות אנרגיה:

1 - מרגע השחרור עד רגע עצירת הגוף עקב החיכוך.

2 - מעצירת הגוף עקב החיכוך ועד הנק' העליונה ביותר.

(1)

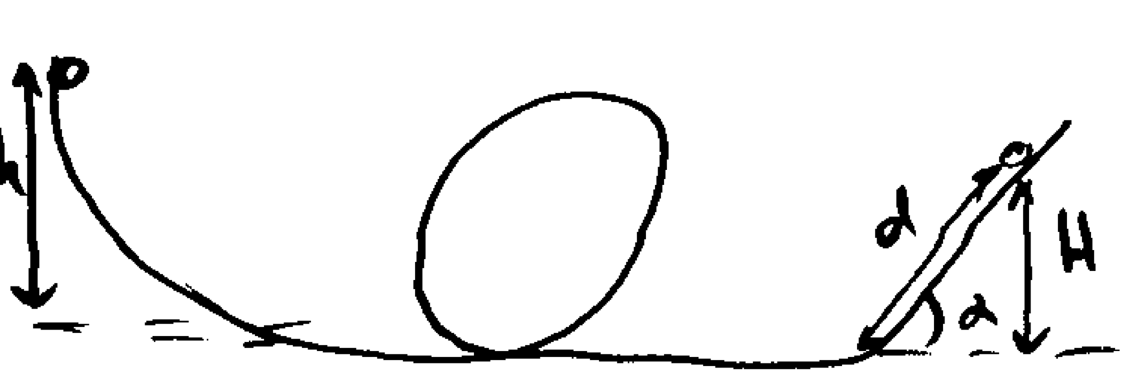
$$E_f - E_i = mgH - mgh \longrightarrow$$ בחרנו H להיות הגובה עצירה

$$W_{N.C.F} = -f_k d = -\mu mg\cos\alpha d \longrightarrow$$ בחרנו d להיות אורך המסלול שהגוף עולה.

(2)

$$E_f - E_i = \frac{1}{2}mv_c^2 + mg2R - mgH$$

$$W_{N.C.F} = -f_k d = -\mu mg\cos\alpha d$$



בנוסף קיים קשר בין אורך המסלול והגובה

$$H = d\sin\alpha$$

בעזרת שלושת המשוואות הללו נוכל למצוא את הגובה h.

$$\frac{1}{2}mv_c^2+mg2R-mgH=-\mu mg\cos\alpha\, d$$

$$mgH-mgh=-\mu mg\cos\alpha\, d$$

$$H=d\sin\alpha$$
$$v_c^2=gR$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v_c^2+\cancel{m}g2R-\cancel{m}gd\sin\alpha=-\mu\cancel{m}g\cos\alpha\, d$$

$$\cancel{m}\cancel{g}d\sin\alpha-\cancel{m}\cancel{g}h=-\mu\cancel{m}\cancel{g}\cos\alpha\, d$$

$$d=\frac{h}{\sin\alpha+\mu\cos\alpha} \Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{g}R+2\cancel{g}R=\cancel{g}d(\mu\cos\alpha-\sin\alpha)$$

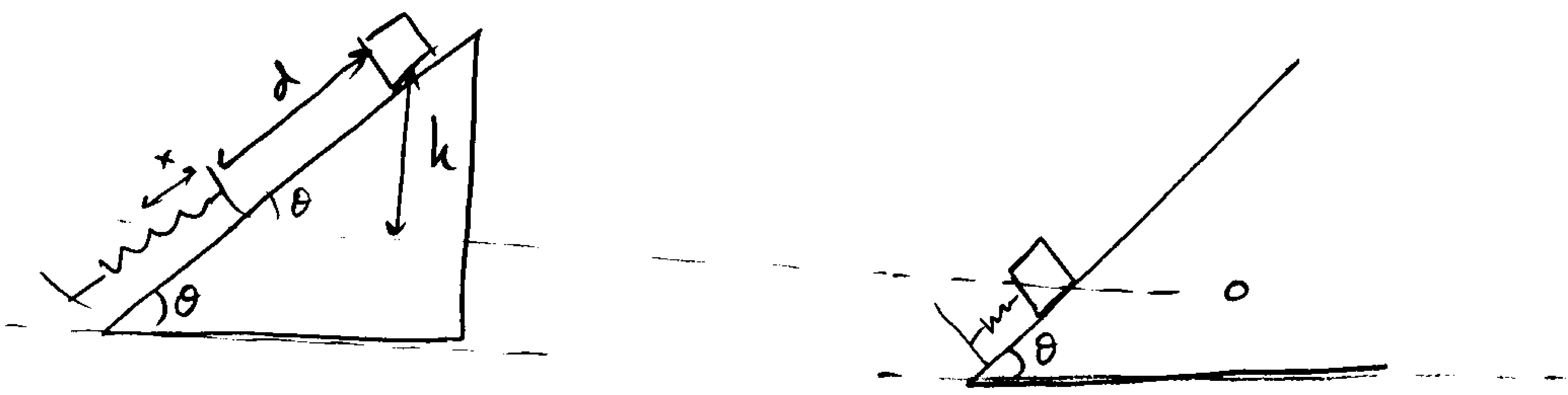
$$h=\frac{5}{2}\left(\frac{\sin\alpha+\mu\cos\alpha}{\mu\cos\alpha-\sin\alpha}\right)R$$

תרגיל <1-4205>

1) נשתמש בשימור אנרגיה מכיוון שבבעיה יפעלו אך ורק כוחות שמרים.

נבחר את נק' האפס בנק' בה המסה נעצרת לגמרי

אז האנרגיה בהתחלה תהיה רק גובה ובסוף רק קפיץ.



$$E_i = mgh = mg(x+d)\sin\theta$$

$$E_f = \frac{1}{2}kx^2$$

$$mg\overbrace{(x+d)}^{L}\sin\theta = \frac{1}{2}kx^2$$

$$L = \frac{1}{2}\frac{kx^2}{mg\sin\theta}$$

כיוון שהקפיץ לא נתון ולכן צריך לחשב אותו מהנתון על הכוח שיש להפעיל על הקפיץ כדי לכווץ אותו באורך Δx

$$F = \Delta x \cdot k \Rightarrow k = \frac{F}{\Delta x}$$

אז בסופו של דבר נקבל

$$L = \frac{1}{2}\frac{Fx^2}{\Delta x\, mg\sin\theta} = \frac{1}{2}\frac{268\times\left(\frac{5.38}{100}\right)^2}{\left(\frac{2.33}{100}\right)\times 3.18\times 10\times \sin 32} \cong 1m$$

2) עכשיו ניתן למצוא את d. את L הגדרנו בעזרת x ו-d אז

$$d = L - x$$

עכשיו שוב נשתמש בשימור אנרגיה

$$E_i = mgh = mgL\sin\theta$$

$$E_f = mgx\sin\theta + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\cancel{m}gL\sin\theta = \cancel{m}gx\sin\theta + \frac{1}{2}\cancel{m}v^2$$

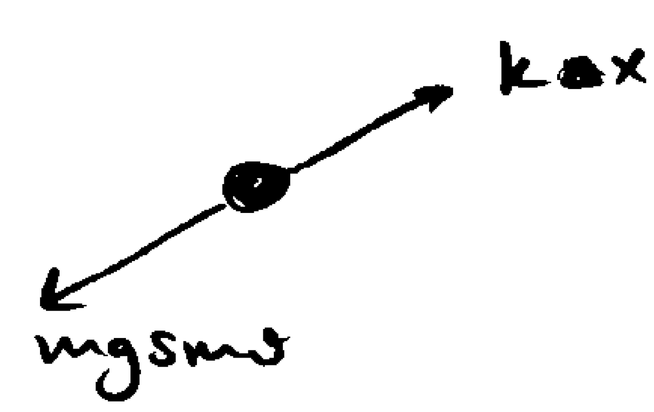
$$V^2 = 2g\sin\theta(L-x) = 2gd\sin\theta$$

$$V = \sqrt{2\times10\times\sin32^\circ\times0.946^2} \cong \sqrt{2\times10\times\frac{1}{2}\times0.946^2} \cong 3\ m/s$$

3.) המהירות המקסימלית של הגוף היא כאשר שקול הכוחות הוא אפס, לכן נחפש את המיקום בו יש ש.מ.

$$mg\sin\theta - k\Delta x = 0$$

$$\Delta x = \frac{mg\sin\theta}{k} \cong$$



כאשר הכיווץ של הקפיץ הוא Δx כאשר התאוצה היא אפס.

נרשום את האנרגיה של הגוף בנק' זו

$$E_{\text{ש.מ.}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k\Delta x^2 + mg(x-\Delta x)\sin\theta$$

$$E_i = mg(x+d)\sin\theta$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k\Delta x^2 + mg(\cancel{x}-\Delta x)\sin\theta = mg(\cancel{x}+d)\sin\theta$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(d+\Delta x)\sin\theta - \frac{1}{2}k\Delta x^2$$

$$V^2 = 2g(d+\Delta x)\sin\theta - \frac{k}{m}\Delta x^2$$

4.) נחפש ולבדוק מה המרחק שהגוף עבר.

$$\begin{cases} E_i = mg(\tilde{x}+d)\sin\theta \\ E_f = \frac{1}{2}k\tilde{x}^2 \\ W = -f_k(\tilde{x}+d) = -\mu mg\cos\theta(\tilde{x}+d) \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}k\tilde{x}^2 - mg(\tilde{x}+d)\sin\theta = -\mu mg\cos\theta(\tilde{x}+d)$$

$$\frac{1}{2}k\tilde{x}^2 = mg(\tilde{x}+d)\underbrace{(\sin\theta - \mu\cos\theta)}_{<0} \leftarrow$$

כלומר שהקפיץ לא התכווץ

נבדוק אם לגוף יש מהירות - כלומר אם הוא זז

$$\begin{cases} E_f = \frac{1}{2}mv^2 \\ E_i = mgL\sin\theta \\ W_f = -\mu mgL\cos\theta \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v^2 - \cancel{m}gL\sin\theta = -\mu \cancel{m}gL\cos\theta$$

$$v^2 = 2gL\underbrace{(\sin\theta - \mu\cos\theta)}_{<0}$$

שם ריבוע בטוח לא הגיוני הפעם עבור המהירות, ולכן הגוף בכלל לא זז.

כלומר במקרה זה עם החיכוך הגוף לא נע ולכן אין מה לדבר על הסעיפים כי הגוף לא נע.

גרף עם פוטנציאל

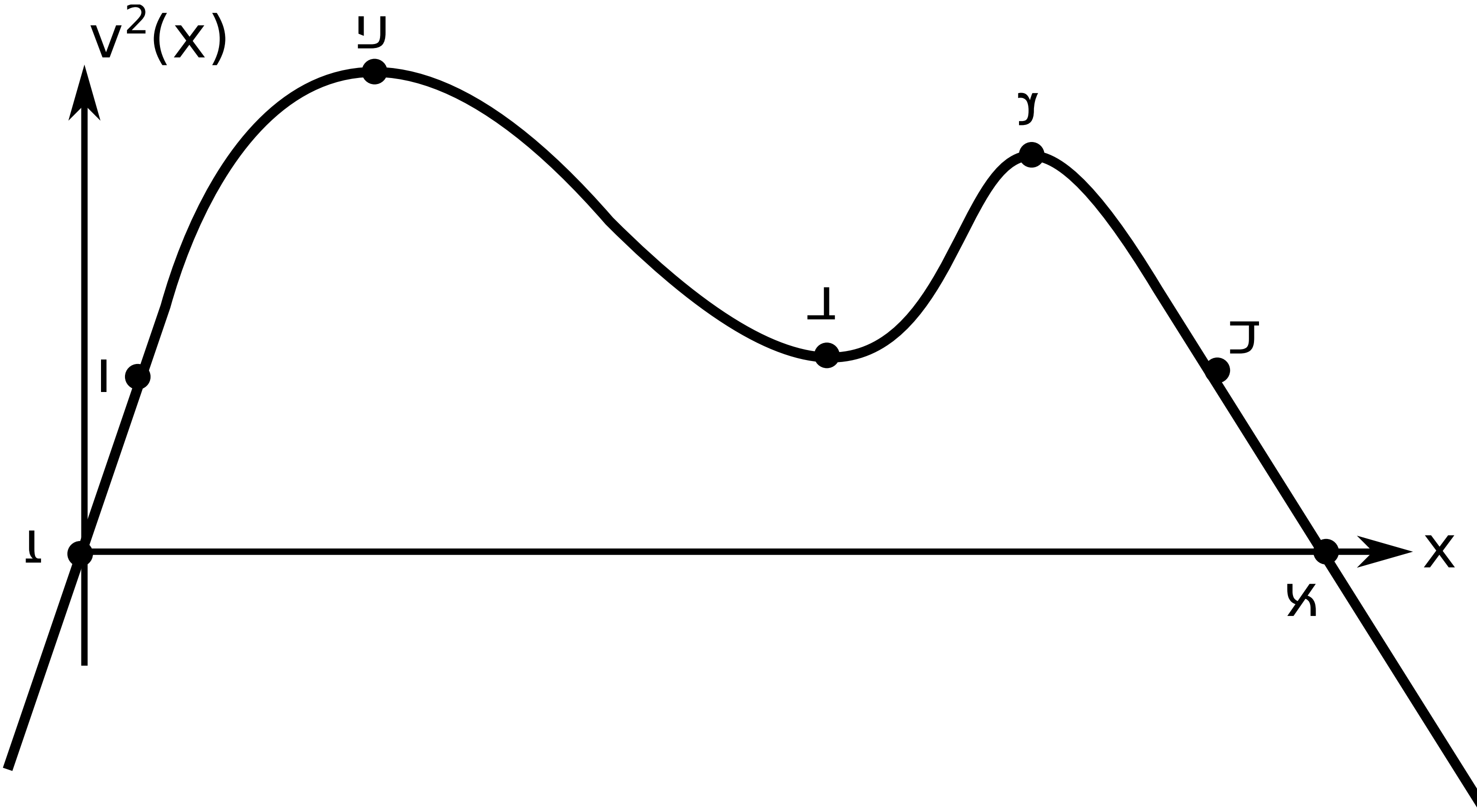
א. מהירות הגוף מתאפסת כאשר האנרגיה הקינטית מתאפסת, וזה קורה כשאין הפרש בין הקו המקוקו לגרף הפוטנציאל. זה קורה בשתי נקודות, א' וז'.

ב. מהירות הגוף מקסימלית כשההפרש בין הקו המקוקו לגרף האנרגיה מקסימלי, וזה קורה בנקודה ה'.

ג. הכוח מתאפס כשנגזרת הפוטנציאל מתאפסת, וזה קורה בג',ד',וה'.

ד. כיוון הכוח נקבע על ידי הנגזרת. כאשר היא חיובית, הכוח שמאלה, וכשהיא שלילית הכוח ימינה. במקרה שלנו, הכוח ימינה בין ג' לד' ובין ה' לז', והכוח שמאלה בין א' לג' ובין ד' לה'.

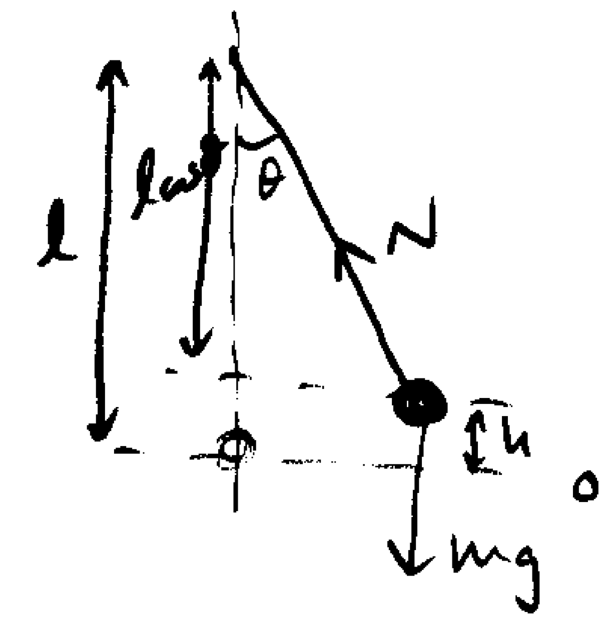
ה. המהירות בריבוע שווה להפרש בין הקו המקווקו לגרף הפוטנציאל, (עד כדי מסה חלקי שתיים), לכן פשוט צריך להפוך את הדף:



ו. הגוף לא יכול לנוע לאינסוף או למינוס אינסוף, ולכן הוא במסלול קשור.

תרגיל ב 422-1

א.)



הכוחות שפועלים הם N ו- mg. כח הכבידה הוא כח משמר, ואילו הנורמל N הוא לא בהכרח משמר (צריך לבדוק) אבל מכיוון שהוא לא עושה עבודה אז אין לזה משמעות.

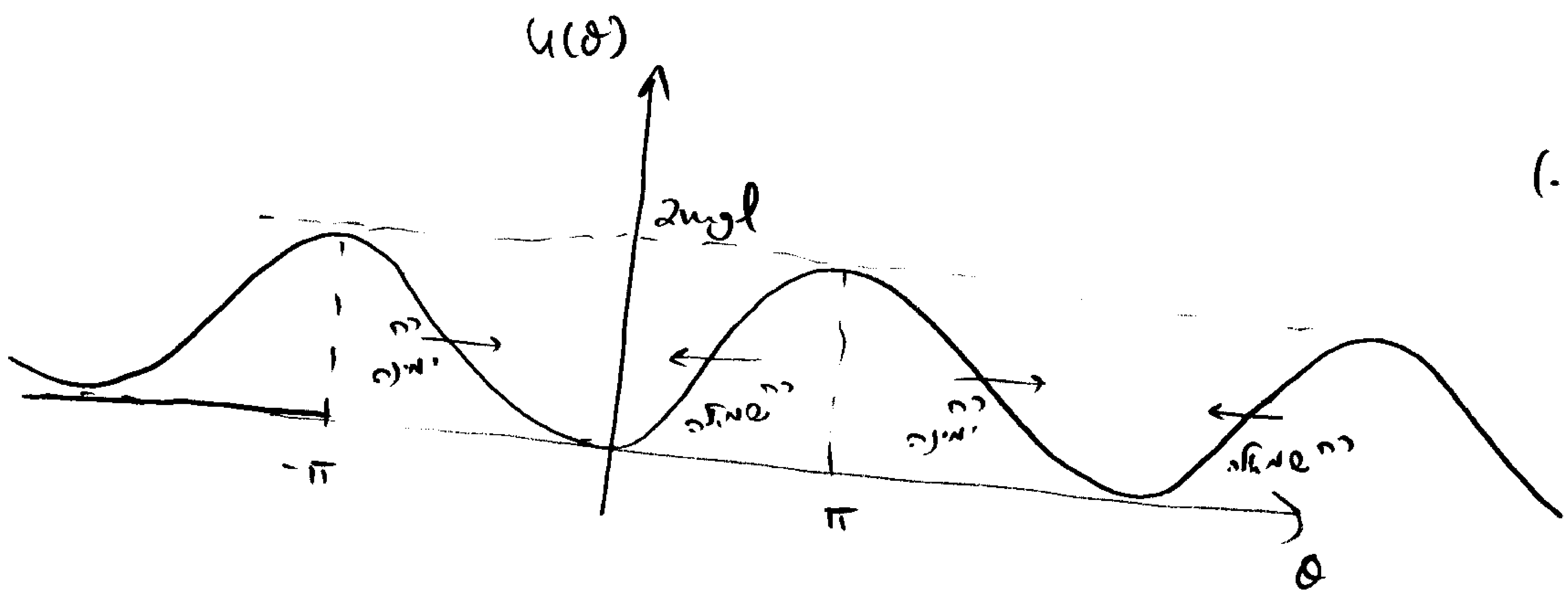
ב.) האנרגיה הפוטנציאלית של הגוף תהיה רק אנרגיה פוטנציאלית כובדית.
נגדיר את נק' האפס כאשר הגוף נמצא בתחתית המסלול ולכן הגובה h הוא

$$h = l(1-\cos\theta)$$

ומכאן שהאנרגיה הפוטנציאלית

$$U = mgl(1-\cos\theta)$$

ג.)



ד.) הכח שפועל על הגוף נתון ע"י

$$\vec{F} = -\frac{du}{d\theta}\hat{\theta}$$

כאשר הכח חיובי אז השיפוע שלילי ושהשיפוע חיובי הכח שלילי.

ה.) נק' ש.מ. הן נק' בהן הכח שווה לאפס, כלומר שהנגזרת של הפוטנציאל היא אפס. אלו הן בעצם נק' הקיצון של הגרף.

בכדי שנק' הקיצון תהיה יציבה צריך שהיא תהיה נק' מינימום, כלומר שאם נוסיף Δ אנרגיה אז הגוף עדיין ישאר במקומו ולא יברח.

ו.) הגוף יכול לבצע 2 סוגים של מסלולים, עבור $E>2mgl$ אז קו האנרגיה המכנית שלו גבוה מהנק' קיצון ואז הגוף עושה תנועה במעגל.

כאשר האנרגיה המכנית $E<2mgl$ אז הגוף יעשה תנועה מחזורית סביב נק' המינימום. כך נקרא מסלול קשור.

וכך כל עוד $E<2mgl$ אז המסלול הוא קשור.

ז.) האנרגיה הקינטית המקסימלית שניתן לתת לגוף כאשר הוא נמצא בנק' המינימום בכדי שיבצע תנועה של מסלול קשור היא

$$k_0=2mgl$$

כלומר כל עוד $k_0<2mgl$ עבור $\theta=2\pi n$ עם $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$ אז הגוף יבצע תנועה במסלול סגור.