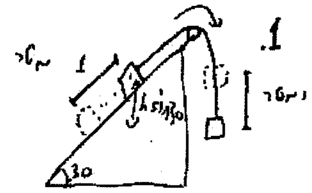
ארבל כהן 7

1_4106

1)

פתרון תרגיל 5



$h = 1m$ מתקיים שימור התחלתי.

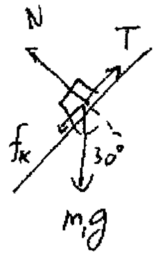
(נניח שהגוף נע בכיוון השעון).

$$\begin{cases} E_{\text{התחלה}} = m_2 g h \\ \quad \parallel \\ E_{\text{סוף}} = m_1 g h\sin30 + \frac{1}{2}m_1V^2 + \frac{1}{2}m_2V^2 \end{cases}$$

(אותה מהירות לשניהם (אותו חוט)).

$$V = \left[\frac{2}{m_1+m_2}(gh)\left(m_2 - \frac{m_1}{2}\sin30\right)\right]^{1/2} = \underline{\underline{8.85\,m/s}}$$

שימו לב שאם לא היינו יודעים מהן המסות אז $m_2 - m_1\sin30$ יכול להיות שלילי שזה אומר שגוף לא יעלה נגד כיוון השעון אלא נגדו (בכיוון ההפוך) עד כדי כך שהוא נע בכיוון השעון.



ב. (לא השתמרה: הביטוי לאנרגיה)

$$E_{\text{סוף}} = E_{\text{התחלה}} + W_{f_k}$$

$$W_{f_k} = -f_k \cdot h = -\mu_k N h = -\mu_k m_1 g\cos30 \cdot h$$

כלומר:

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2 = (m_2 - m_1\sin30)gh - \mu_k m_1 g\cos30 h$$
$$\Downarrow$$
$$V = \underline{\underline{8.05\,m/s}}$$

ב"ה

פתרון: - 1_4117

נתונים:

$$F(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le 5 \\ 10 & 5 \le x \le 15 \\ 40-2x & 15 \le x \le 20 \end{cases}$$

$$m = 5\,kg, \quad v_0 = 4\,m/s.$$

א. עבודה בכל אחד מהקטעים:

$$W_1 = \int_{x=0}^{x=5} F_1(x)\,dx = \int_0^5 2x\,dx = \left[x^2\right]_0^5 = 25\,j \quad (1)$$

$$W_2 = \int_{x=5}^{x=15} F_2(x)\,dx = \int_5^{15} 10\cdot dx = \left[10\,x\right]_5^{15} = 10(15-5) = 100j \quad (2)$$

$$W_3 = \int_{x=15}^{x=20} F_3(x)\,dx = \int_{15}^{20} (40-2x)\,dx = \left[40x - x^2\right]_{15}^{20} = \quad (3)$$

$$= 40\cdot 20 - 20^2 - 40\cdot 15 + 15^2 = 25\,j$$

ב. לפי משפט עבודה-אנרגיה, השינוי באנרגיה הקינטית שווה לסך כל העבודה:

$$\Delta E = W_1 + W_2 + W_3 = 150\,j$$

ג.

$$\Delta E = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$v_1^2 = v_0^2 + \frac{2\Delta E}{m}$$

מהירות הגוף לאחר 20 מטרים - $v_1 = \sqrt{v_0^2 + \frac{2\Delta E}{m}} = \sqrt{16 + \frac{2\cdot 150}{5}} \approx 8.72\,m/s$

תנועה מעגלית זקופה

על מנת שהגוף יבצע תנועה מעגלית זקופה, נדרוש שהחוט יהיה מתוח בכל עת ($T \geq 0$). הנקודה הקריטית ביותר היא כשהגוף בשיא הגובה. מהירותו שם היא v_0. לכן, תאוצתו הרדיאלית לכיוון מרכז המעגל היא $\frac{v_0^2}{l}$. נרשום את משוואת החוק השני של ניוטון עבור הנקודה הכי גבוהה:

$$T + mg = m\frac{v_0^2}{l}$$
$$m\frac{v_0^2}{l} - mg = T \geq 0$$
$$v_0 \geq \sqrt{gl}$$

מעניקים לכדור $v_0 = 2\sqrt{gl}$. אנחנו יודעים על פי הסעיף הראשון שהגוף אכן יבצע תנועה מעגלית זקופה. אפשר למצוא את מהירות הגוף בכל זווית בעזרת משוואת שימור האנרגיה. נקבע את האפס במרכז המעגל, ונקבל:

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$
$$\frac{mv_0^2}{2} + mgl = \frac{mv^2}{2} + mgl\cos\theta$$
$$v^2 = v_0^2 + 2gl(1-\cos\theta) = 4gl + 2gl - 2gl\cos\theta = 2gl(3-\cos\theta)$$

אז יש לנו גוף שנע בתנועה מעגלית, ואנחנו יודעים את מהירותו בכל עת. על מנת לקבל את המתיחות בחוט, נרשום את משוואות החוק השני עבור הציר הרדיאלי :

$$T + mg\cos\theta = ma_r = m\frac{v^2}{l}$$
$$T = m\frac{v^2}{l} - mg\cos\theta = mg(6-2\cos\theta) - mg\cos\theta = mg(6-3\cos\theta)$$

אומרים לנו שהחוט יקרע בT_{max}. כלומר ב:

$$T = mg(6-3\cos\theta) = T_{max}$$
$$6mg - T_{max} = 3mg\cos\theta$$
$$\cos\theta = \frac{6}{3} - \frac{T_{max}}{3mg} = 2 - \frac{3.6}{3} = 0.8$$

את המהירות כפונקציה של הזווית כבר מצאנו מזמן, רק נציב את הזווית שחישבנו:

$$v_1 = \sqrt{gl(6-2\cos\theta)} = \sqrt{4.4gl}$$

לסעיף האחרון אנחנו צריכים את הרכיב האנכי של המהירות, ואת גובה הגוף ברגע הניתוק. יש לנו את גודל המהירות ואת הזווית, ולכן הכל ידוע. גובה הנתק (ביחס ל0 שקבעתי במרכז המעגל) הוא:

$$y_1 = l\cos\theta = 0.8l$$

ורכיב הy של המהירות:

$$v_{1y} = -v_1\sin\theta = -v_1\sqrt{1-\cos^2\theta} = -\sqrt{4.4gl}\sqrt{0.36} = -\sqrt{1.58gl}$$

נותר רק לרשום את משוואות התנועה של הגוף:

$$y = y_0 + v_0 t + a\frac{t^2}{2}$$
$$-3l = 0.8l - \sqrt{1.58gl}t - g\frac{t^2}{2}$$
$$\frac{g}{2}t^2 + \sqrt{1.58gl}t - 3.8l = 0$$
$$t_{1,2} = \frac{-\sqrt{1.58gl} \pm \sqrt{1.58gl + 4 \cdot 3.8l \cdot \frac{g}{2}}}{g}$$
$$t_+ \approx 0.56s$$

הזמן החיובי הוא הזמן הרלוונטי בבעיה שלנו.

קפיץ וחיכוך

בתנועה מA ל C פועלים כוחות הכובד, הנורמל, והחיכוך. הכובד משמר, הנורמל תמיד ניצב לתנועה ולכן אינו עושה עבודה, ואת עבודת החיכוך אנו יכולים לחשב. כוח החיכוך בקטע המדובר הוא:

$$f = \mu_k N$$

$$N - mg = 0$$

$$f = \mu_k mg$$

$$W = \int f dr = -\mu_k mgd$$

נסמן את גובה 0 במישור , ונשתמש במשפט עבודה אנרגיה:

$$\begin{aligned} K_i + U_i + W &= K_f + U_f \\ mgR - \mu_k mgd &= \frac{mv^2}{2} \\ v^2 &= 2g(R - \mu_k d) \end{aligned}$$

שימו לב שהמהירות בריבוע חייבת להיות חיובית, וזה נותן לנו תנאי לגבי האם בכלל הגוף יגיע לקפיץ.
הקפיץ מתכווץ בS, והשוואת האנרגיה מרגע הפגיעה בקפיץ ועד סיום ההתכווצות נותנת:

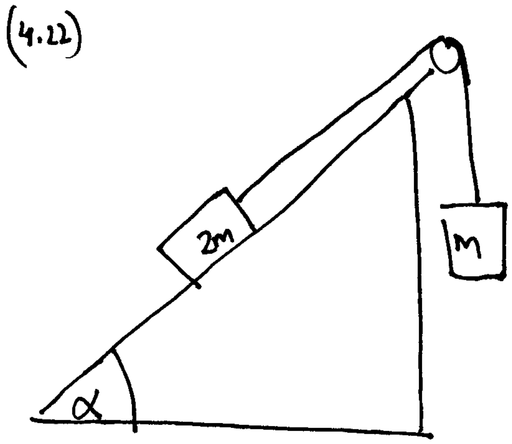
$$\begin{aligned} \frac{mv^2}{2} &= \frac{kS^2}{2} \\ 2mg(R - \mu_k d) &= kS^2 \\ k &= \frac{2mg(R - \mu_k d)}{S^2} \end{aligned}$$

מכיוון שהחיכוך בהלוך ובחזור יעשה את אותה עבודה, ניתן פשוט לרשום את משפט העבודה-אנרגיה מתחילת התנועה ועד סופה:

$$\begin{aligned} mgR + W &= mgh \\ mgR - 2 \cdot \mu_k mgd &= mgh \\ h &= R - 2\mu_k d \end{aligned}$$

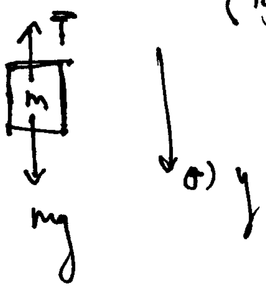
יש לשים לב ש$h > 0$. אם מקבלים גובה קטן מאפס, זה אומר שהגוף בכלל לא יסיים את התנועה, והחיכוך יעצור אותו בדרך.

(4.22)



ex-09-04

(א)

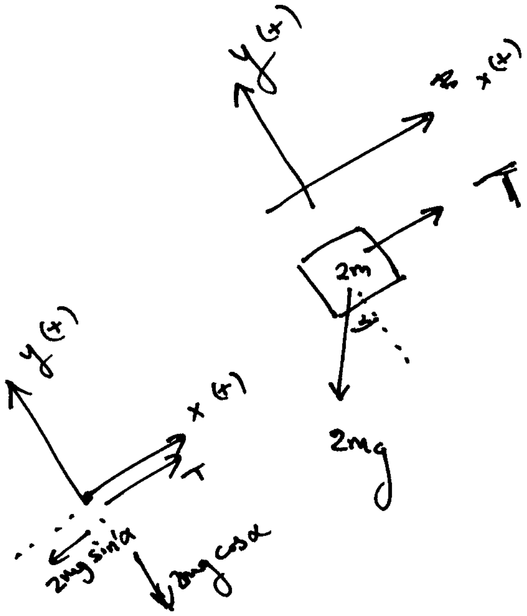


עבור שמ :

$$\sum F_y = 0$$

$$mg - T = 0 \Rightarrow \underline{mg = T} \quad (i)$$

עבור המסה השניה :



$$\sum F_x = 0$$

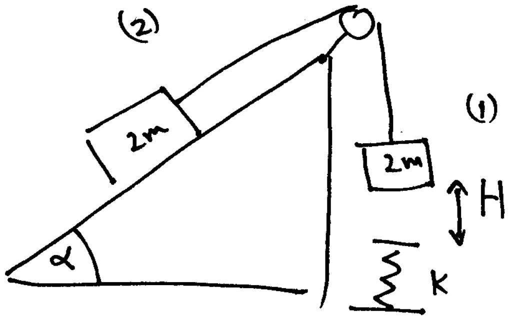
$$T - 2mg\sin\alpha = 0 \quad (ii)$$

נציב את (i) ב(ii) ונקבל :

$$mg - 2mg\sin\alpha = 0$$

$$1 = 2\sin\alpha$$

$$\alpha = 30^\circ$$

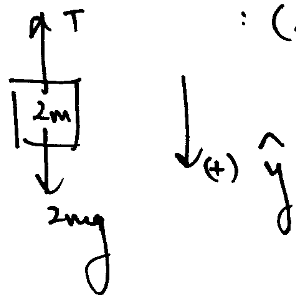


(ד)

מצאנו את α
[illegible] כך

$(\alpha = 30^\circ)$

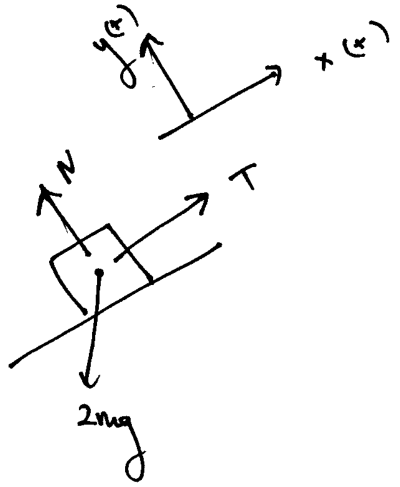
נסתכל על מסה (1):



$\Sigma F_y = (2m)\cdot a_y$

(i) $2mg - T = 2m \cdot a$

נסתכל על מסה (2):



$\Sigma F_x = (2m)\cdot a$

$T - 2mg\sin\alpha = 2m \cdot a$.

נציב α ונקבל:

(ii) $T - mg = 2ma$

נחבר (i) + (ii) ונקבל:

$\boxed{mg = 4ma} \Rightarrow \boxed{a = g/4}$

$$V^2 = V_0^2 + 2a \cdot H$$

$$V^2 = 2 \cdot g/4 \cdot H \qquad (V_0 = 0)$$

$$V = \sqrt{gH/2} \quad //$$

$$m_1^* = m_2^* = 2m \ /$$

דרך נוספת - דרך שימור אנרגיה.

שימור האנרגיה הוא שימור אנרגיה של <u>כל</u> המערכת

$$E_i = E_f$$

$$E_{1i} + E_{2i} = E_{1f} + E_{2f}$$

הסימון (1) מתייחס למסה בשיפוע

$$\tfrac{1}{2} m_1^* V_{1_0}^2 + m_1^* g h_{1_0} + \tfrac{1}{2} m_2^* V_{2_0}^2 + m_2 g h_{2_0}$$

$$= \tfrac{1}{2} m_1^* V_{1_f}^2 + m_1^* g h_{1_f} + \tfrac{1}{2} m_2^* V_{2_f}^2 + m_2 g h_{2_f}$$

לעומת הסימון (2) המתייחס למסה התלויה.

(2)

$i \Leftarrow$ מסמן התחלה.

$f \Leftarrow$ final סיום

ניתן להניח [לשים שלא חייבים] $h_{10} = h_{20} = 0$

כמו כן $V_{10} = V_{20} = 0$ ולכן:

$$0 + 0 + 0 + 0 = \tfrac{1}{2}(2m)V^2 + 2mg\,(H\sin\alpha) + \tfrac{1}{2}(2m)V^2 + 2mg\,(-H)$$

שימו לב לכל אחד מהגופים יש אנרגיה "גובה", ואנרגיה קינטית

ובגלל $\alpha = 30^\circ$ ונקבל:

$$0 = -mgH + 2mV^2$$

$$V = \sqrt{gH/2} \quad //$$

הסטת $= x$.

סעיף (3):

$$E_{el_i} + E_{1_i} + E_{2_i} = E_{1_f} + E_{2_f} + E_{el_i}$$

$$0 + (0+0) + (0+0) = \frac{1}{2} m_1^* V_{1_f}^2 + m_1^* g h_{1_f} + \frac{1}{2} m_2^* V_{2_f}^2 + m_2^* g h_{2_f} + \frac{1}{2} k x^2$$

← נתון כי הכוח המחבר את הגופים נותן מנוחה במשך כל זמן כיווץ הקפיץ

[הנחה זו, לדעתי - לא מציאותית...]

ולכן:

$V_{1_f} = V_{2_f} = 0$

$$0 = 0 + (2m) g (H+X) \sin 30^\circ + 0 - 2mg(H+X) + \frac{1}{2} k x^2$$

$$0 = mgH + mgX - 2mgH - 2mgX + \frac{1}{2} k x^2$$

$$0 = +\frac{1}{2} k x^2 - mgX - mgH$$

$$0 = x^2 - \frac{2mg}{k} X - \frac{2mgH}{k}$$

$$x_{1,2} = \frac{mg}{k} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{4m^2g^2}{k^2}\right) + \frac{8mgH}{k}}$$

$$x_{1,2} = \frac{mg}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2mgH}{k}}$$

פיסיקלית - רק התשובה החיובית נכונה לכן:

$$X = \frac{mg}{k} + \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2mgH}{k}}$$