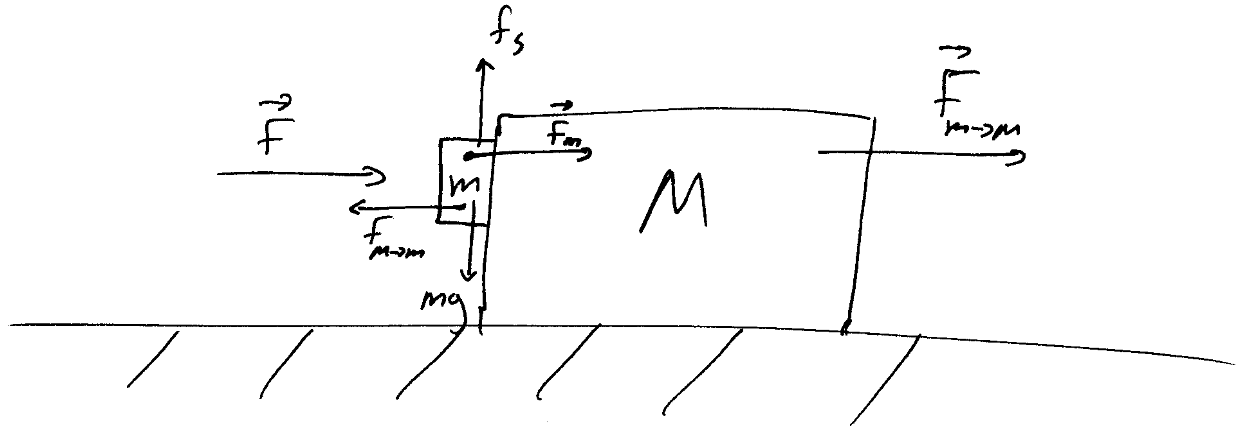


על ציר $\hat{x}$:

$$\hat{x}: \quad \vec{F}_{m\to M} = Ma$$

$$+ \quad \vec{f}_m + \vec{F}_{M\to m} = ma$$

$$\cancel{\vec{F}_{m\to M} + \vec{f}}$$

חוק שלישי

$$\underbrace{\vec{F}_{m\to M}} + \vec{f}_m + \underbrace{\vec{F}_{M\to m}} = (M+m)a$$

$$\Rightarrow \quad \vec{f}_m = (M+m)a$$

$$\frac{\vec{F}_m}{M+m} = a$$

ונרצה למצוא ג׳ — $f_{M\to m}$

כי הוא הכח הנדרש:

$$\vec{F}_{M\to m} = -\vec{F}_{m\to M} = -\frac{M\cdot \vec{F}_m}{M+m}$$

סה"כ הכח הנורמלי:

$$N = \frac{M \cdot F}{M+m}$$

והוא מכוון בכיוון ציר $\hat{x}$ השלילי.

<u>כעת אם כן:</u>

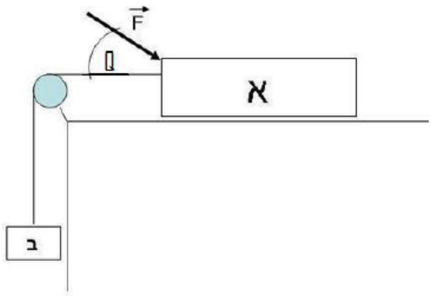
$$\hat{y}: \quad mg = f_s = \mu_s \cdot N = \frac{\mu_s \cdot M \cdot F}{M+m}$$

$$\Rightarrow \quad F = \frac{mg[M+m]}{\mu_s \cdot M}$$

<u>בדיקת יחידות:</u>

$$[F] = \frac{\overset{kg}{[m]} \cdot \overset{m/sec^2}{[g]} \cdot \overset{kg}{[(M+m)]}}{\underset{\#}{[\mu_s]} \cdot \underset{kg}{[M]}} = kg \cdot \frac{m}{sec^2} = \text{Newton} \checkmark$$

Solution, Prob. 1 3201



a. Choosing the positive direction of the *x* axis to the left, we have for mass A:

$$\sum F_x^{(A)} = 0 = m_B g - F\cos\theta + f_s$$

Notice that the static friction was selected as positive. Its direction is actually determined by the competition between the other forces in the problem, such that-

$$\boxed{f_s = F\cos\theta - m_B g}$$

may be positive (friction pointing to the left) or negative (friction pointing to the right).

b. We now demand that the friction is indeed in the static regime:

$$-\mu N \le F\cos\theta - m_B g \le \mu N$$

$$\boxed{\frac{m_B + \mu m_A}{\cos\theta - \mu\cos\theta} g \ge F \ge \frac{m_B - \mu m_A}{\cos\theta + \mu\cos\theta} g}$$

Where here we substituted $N = m_A g + F\sin\theta$ from the *y* axis equation.

CHECK UNITS AND LIMITING CASES!!

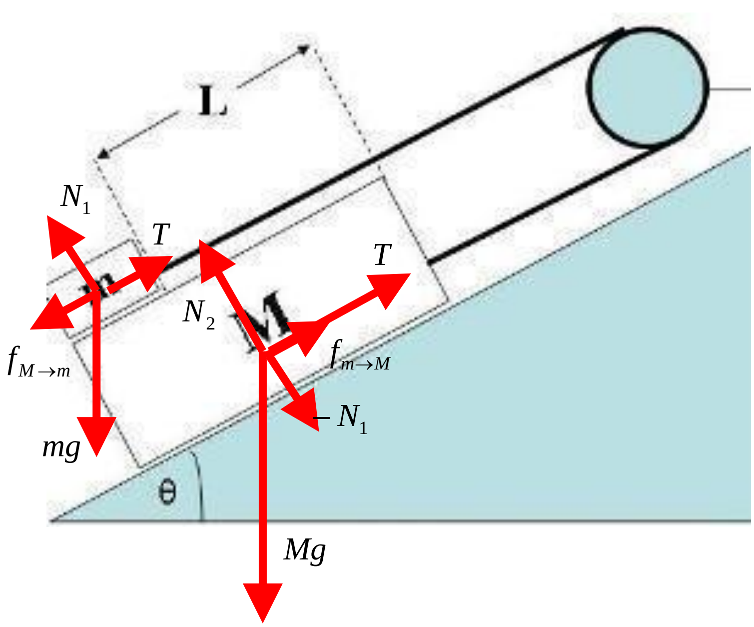
c. We now consider the case where $F = 0$. Newton's law states:

$$\sum F_x^{(A)} = m_A a = m_B g - f_k$$

$$\boxed{a = \left(\frac{m_B}{m_A} - \mu\right) g}$$

Where here we substituted $f_k = \mu m_A g$.

דיאגרמת כוחות על שני הגופים:



שני גופים עם חיכוך

יש שני גופים עם חיכוך ביניהם, אשר מחוברים בחבל דרך גלגלת.

משוואות החוק השני של ניוטון נותנות (במערכת צירים משופעת, ימינה x ולמעלה y):

$$\begin{pmatrix}T\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}f\\0\end{pmatrix}-mg\begin{pmatrix}\sin\theta\\\cos\theta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\N_1\end{pmatrix}=m\vec{a}_1$$
$$\begin{pmatrix}T\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}f\\0\end{pmatrix}-Mg\begin{pmatrix}\sin\theta\\\cos\theta\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\N_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\N_2\end{pmatrix}=M\vec{a}_2$$

שימו לב שבחרנו כאן שהחיכוך פועל שמאלה על הגוף הקטן. זה נובע מההנחה שמסתו קטנה יותר והוא מושך פחות. אם טעינו, הסימן של כוח החיכוך פשוט יהיה שלילי. כמו כן, החיכוך על הכוח הגדול מגיע מהגוף הקטן, בהשלמה עם חוקו השלישי של ניוטון.

אנחנו מאלצים את הגופים לנוע בכיוון השיפוע)x(ובתאוצה מנוגדת (כי הם מחוברים לאותו חוט):

$$\vec{a}_1=\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}$$
$$\vec{a}_2=-\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}$$

נציב את זה לשתי המשוואות הוקטוריות ונקבל 5 משוואות ב4 נעלמים:

$$\begin{aligned}
&T-f-mg\sin\theta=ma\\
&-mg\cos\theta+N_1=0\\
&T+f-Mg\sin\theta=-Ma\\
&-Mg\cos\theta-N_1+N_2=0\\
&f=\mu N_1
\end{aligned}$$

נחסר את השלישית מהראשונה:

$$-2f+(M-m)g\sin\theta=(m+M)a$$
$$(m+M)\neq 0$$
$$a=\frac{M-m}{M+m}g\sin\theta-2\frac{\mu N_1}{M+m}=\frac{(M-m)\sin\theta-2\mu m\cos\theta}{M+m}g$$

כדאי לבדוק את הפתרון להגיון פיסיקלי. היחידות של המסה מצטצמות ונשארות יחידות של תאוצה. ויש עוד בדיקות שרצוי לעשות (זווית 90 או אפס, וכדומה).

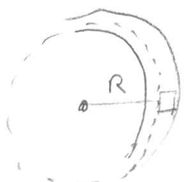
בסעיף הבא, שני הגופים נעים באותה תאוצה לכיוונים שונים. גוף שנע בתאוצה קבועה, ומתחיל ממנוחה, נע ב $x=\frac{at^2}{2}$.

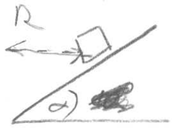
לכן:

$$x_1=\frac{at^2}{2}$$
$$x_2=-\frac{at^2}{2}$$
$$x_1-x_2=L$$
$$at^2=L$$
$$t=\sqrt{\frac{L}{a}}$$

ב"ה

פתרון - 1_3141

מבט-על: 

מבט-צד 

מכונית בכביש מעגלי מוגבה:

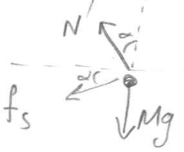
$R = 100\,m$

זווית הטיה $\alpha = 10^\circ$

מקדם חיכוך סטטי $\mu_s = 0.3$

← נתון חיכוך סטטי כי הכוונה היא לתנועה במעגל, כאשר החיכוך מונע עליה או ירידה לאורך המדרון המשופע!

← אם המכונית נוסעת מהר מדי היא "נזרקת" החוצה מהמעגל כלומר עולה במדרון, במהירות המקסימלית המותרת זה נמנע ע"י החיכוך הסטטי, ולכן הכוחות הם:



בכיוון מרכז המעגל:

$$(1) \quad \sum F_r = f_s \cos\alpha + N \sin\alpha = M a_r = M\frac{V^2}{R}$$

בכיוון הניצב:

$$(2) \quad \sum F_z = N\cos\alpha - f_s \sin\alpha - Mg = 0$$

על גבול החלקה:

$$(3) \quad f_{s,max} = \mu_s \cdot N$$

נציב (3) בתוך (2) ונקבל: $N(\cos\alpha - \mu_s \sin\alpha) = Mg$

$$N = \frac{Mg}{\cos\alpha - \mu_s \sin\alpha}$$

נציב ב- (1):

$$\cancel{M}g\left[\frac{\mu_s \cos\alpha}{\cos\alpha - \mu_s \sin\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha - \mu_s\sin\alpha}\right] = \cancel{M}\frac{V^2}{R}$$

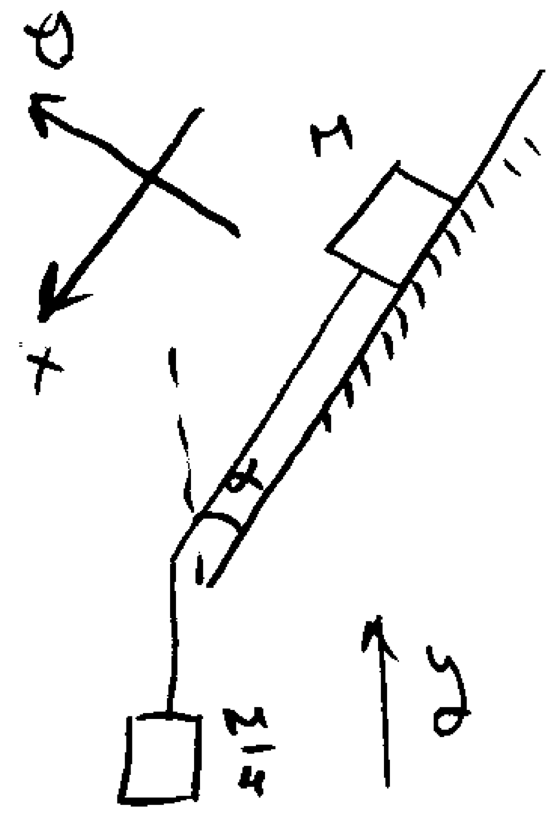
$$V_{max} = \sqrt{Rg \cdot \frac{\sin\alpha + \mu_s\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu_s \sin\alpha}} = \sqrt{100 \cdot 9.8 \cdot \frac{0.47}{0.93}} \approx 22.2\ ^{m}/_{s}$$

$[\approx 80\ ^{km}/_{h}]$

הערה: שימו לב שקיימת גם מהירות מינימלית, שמתחתיה המכונית תחליק למטה!

1.) בהתחלה החרוט לא מסתובב ולכן הבעיה שקולה למישור משופע שמונח עליו מסה המחוברת עם חוט למסה נוספת.

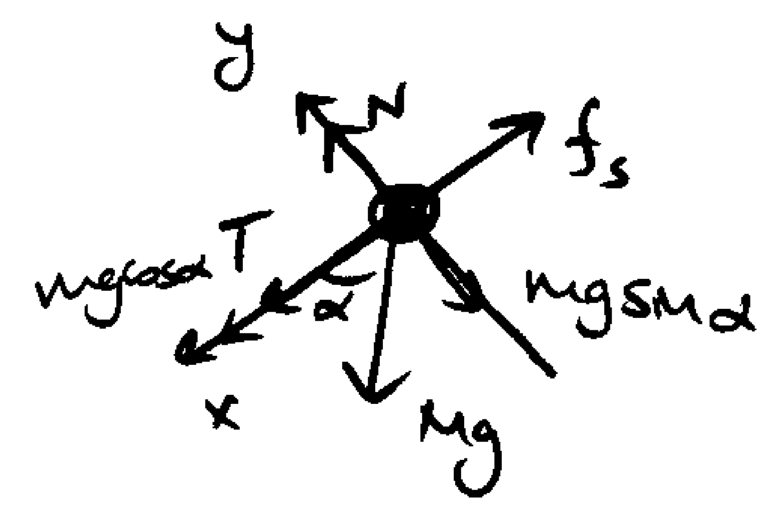
מחפשים מקדם חיכוך ולכן נחפש את כח החיכוך הסטטי שפועל על הגוף. במצב זה נמצא במנוחה



תרשים כוחות:

משוואות כוחות:

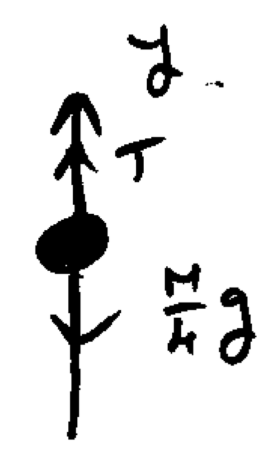
M:



x: $Mg\cos\alpha + T - f_s = 0$

y: $N - Mg\sin\alpha = 0$

$\frac{M}{4}$:



y: $T - \frac{M}{4}g = 0$

בנוסף מכיוון שמדובר בחיכוך סטטי $f_s \le \mu_s N$. סה"כ יש לנו 4 משוואות עם 4 נעלמים, נותר רק למצוא את מקדם החיכוך.

$T = \frac{M}{4}g \qquad f_s = Mg\cos\alpha + T = Mg\cos\alpha + \frac{M}{4}g \Rightarrow$

$\Rightarrow f_s = Mg(\cos\alpha + \frac{1}{4})$

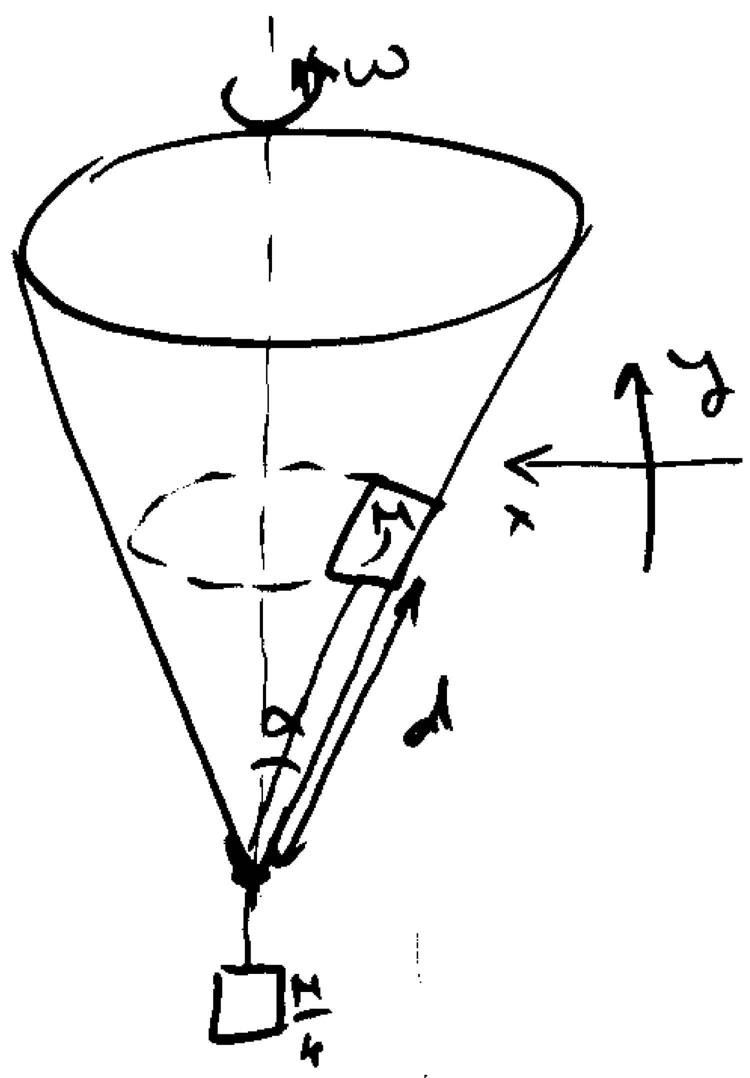
$N = Mg\sin\alpha$

$f_s \le \mu_s N \rightarrow \qquad \mu_s \ge \frac{f_s}{N} = \frac{Mg(\cos\alpha + \frac{1}{4})}{Mg\sin\alpha} = \cot\alpha + \frac{1}{4\sin\alpha}$

מקדם החיכוך המינימלי יהיה

$$\mu_{s_{min}} = \cot\alpha + \frac{1}{4\sin\alpha}$$

2.) כעת נתון כי החרוט מסתובב. מבקשים את המרחק מהקדקד.



המרחק d מאפיין הקונוס יגדיר לנו את רדיוס המעגל שבו תסתובב המסה. כך ש

$$R = d\sin\alpha$$

לכן אם נמצא את הרדיוס נמצא את d. מכיוון שהגוף מבצע תנועה מעגלית יש לו תאוצה רדיאלית כלומר

$$a_r = \omega^2 R = \omega^2 d\sin\alpha$$

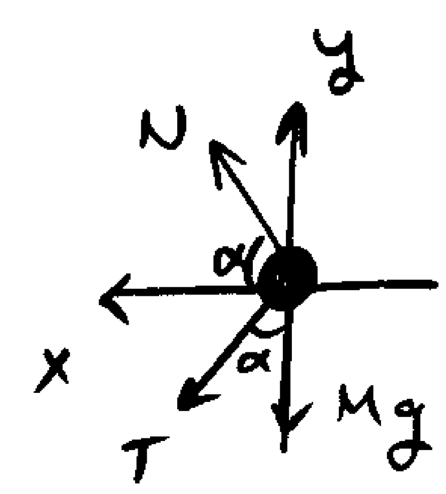
כלומר אם נמצא את גודל התאוצה הרדיאלית נדע מהו d.

נעשה ניתוח כוחות בכדי לגלות את התאוצה, את מערכת הצירים נבחר כך שציר x מצביע לכיוון מרכז המעגל בכדי שהתאוצה תהיה רק בכיוון זה.

הפעם אין חיכוך בבעיה הזו אין צורך לרשום את כח החיכוך שהיה עושה לנו את המוות.

<u>תרשים כוחות:</u>   <u>משוואות כוחות:</u>

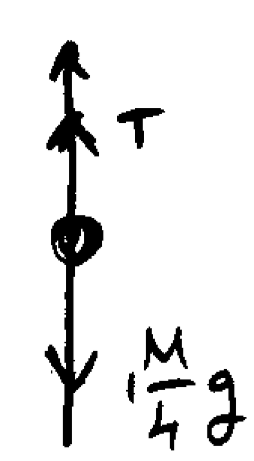
<u>M</u>:



<u>x</u>: $N\cos\alpha + T\sin\alpha = Ma_r$

<u>y</u>: $N\sin\alpha - T\cos\alpha - Mg = 0$

$\frac{M}{4}$:



<u>y</u>: $T - \frac{M}{4}g = 0$

סה"כ יש לנו 3 משוואות עם 3 נעלמים

$$T = \frac{M}{4}g \qquad N\cos\alpha + \frac{M}{4}g\sin\alpha = M\omega^2 d\sin\alpha$$

$$N\sin\alpha - \frac{M}{4}g\cos\alpha - Mg = 0$$

$$N = \frac{M}{4} g \cot\alpha + Mg \frac{1}{\sin\alpha}$$

$$\frac{M}{4} g \sin\alpha + \frac{M}{4} g \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} + Mg \cot\alpha = M\omega^2 d \sin\alpha$$

$$\frac{M}{4} g \sin^2\alpha + \frac{M}{4} g \cos^2\alpha + Mg\cos\alpha = M\omega^2 d \sin^2\alpha$$

$$Mg\left(\frac{1}{4} + \cos\alpha\right) = M\omega^2 d \sin^2\alpha$$

$$d = \frac{\left(\frac{1}{4} + \cos\alpha\right)}{\sin^2\alpha} \frac{g}{\omega^2}$$

3.) כעת נתון כי $d=0.1m$ וגם $\alpha=60°$ ואנו מעוניין למצוא את ω.

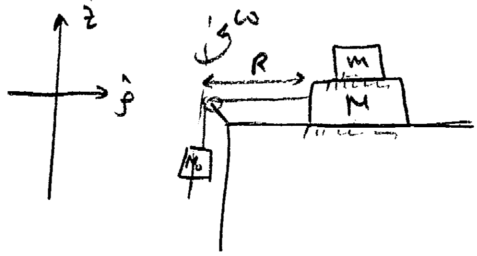
$$\omega^2 = \frac{\left(\frac{1}{4} + \cos\alpha\right)}{\sin^2\alpha} \cdot \frac{g}{d} = \frac{\cancel{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)}}{\cancel{\frac{3}{4}}} \times \frac{10}{0.1} = 100 \ \frac{rad^2}{s^2}$$

$$\omega = 10 \ \frac{rad}{s}$$

תרגיל (שאלה 2)

נרצה למצוא את המהירות ω. את ω נמצא בעזרת המשוואה הרדיאלית.

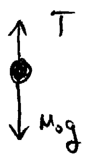
2 הגופים עושים תנועה מעגלית ולכן מאיצים למרכז המעגל.



נבחר מערכת צירים במערכת המעבדה (כלומר מערכת אינרציאלית). מערכת הצירים שנעבוד איתה תהיה מערכת גלילית.

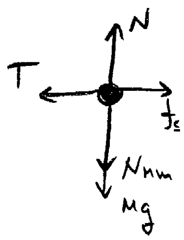
ננתח את שלושת הגופים

M_0:



$\hat{z}$: $T - M_0 g = 0$

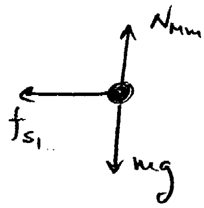
M:



$\hat{\rho}$: $f_{s_1} - T + \vec{f}_{s_2} = -M\omega^2 R$

$\hat{z}$: $N - N_{Mm} - Mg = 0$

m:



$\hat{\rho}$: $-f_{s_1} = -m\omega^2 R$

$\hat{z}$: $N_{Mm} - mg = 0$

שימו לב כי כח החיכוך f_{s_2} יכול להיות לאחד משני הכיוונים, זאת מפני שאם ω גדולה אז המסה M נוטה לברוח החוצה ואילו אם ω קטנה אז המסה M נוטה להחליק פנימה. אם המסה נוטה לברוח החוצה החיכוך יהיה לכיוון $-\hat{\rho}$ ואם נוטה להחליק פנימה אז החיכוך יהיה לכיוון $\hat{\rho}$ כלומר

$$-\mu_s N \le |f_s| \le \mu_s N$$

ניתן גם לנתח את שני המקרים בנפרד, פעם עבור ω גדולה ופעם עבור ω קטנה. אם רוצים לדעת איפה הכיוון מתחלף ניתן למצוא את הנק' הקריטית בה אין חיכוך כלל עם הרצפה כלל.

אנחנו נניח כי ω גדולה רק ש- f_{s_1} יהיה בכיוון המגיחה.

$$T = M_0 g \qquad f_{s_1} - T - f_{s_2} = M\omega^2 R \qquad f_{s_1} = m\omega^2 R$$

$$N = (m+M)g \qquad N_{Mm} = mg$$

$$f_{s_2} = (m+M)\omega^2 R - M_0 g \leq \mu_2 \cdot (m+M) g$$

$$\omega^2 \leq \frac{\mu_2 (m+M) g + M_0 g}{(m+M)R}$$

כאשר ω קטנה אז f_s בכיוון ההפוך

$$T = M_0 g \qquad f_{s_1} - T + f_{s_2} = -M\omega^2 R \qquad f_{s_1} = m\omega^2 R$$

$$N = (m+M)g \qquad N_{Mm} = mg$$

$$-f_{s_2} = (m+M)\omega^2 R + M_0 g \leq \mu_2 (m+M) g$$

$$(m+M)\omega^2 R + M_0 g \geq \mu_2 (m+M) g$$

$$\omega^2 \geq \frac{\mu_2 (m+M) g - M_0 g}{(m+M)R}$$

אז התחום

$$\frac{\mu_2 (m+M) g - M_0 g}{(m+M)R} \leq \omega^2 \leq \frac{\mu_2 (m+M) g + M_0 g}{(m+M)R}$$

אבל האם זה נכון? לא! מפני שיש גם תנאי על המסה m

$$f_{s_1} \leq \mu_1 \cdot N_{Mm}$$

$$m\omega^2 R \leq \mu_1 m g \Rightarrow \omega^2 \leq \frac{\mu_1 g}{R}$$

כלומר התחום המוגדר הוא החיתוך בין 2 התחומים.