חלקיק בעולם התלת מימדי

הביטוי למיקום הוא :

$$r(\vec{t}) = A\hat{i} + Bt^2\hat{j} + Ct\hat{k}$$

המהירות היא:

$$v(\vec{t}) = \frac{dr(\vec{t})}{dt} = 0 + 2Bt\hat{j} + C\hat{k}$$

התאוצה:

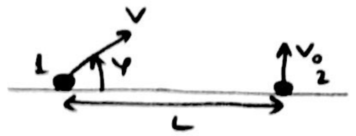
$$a(\vec{t}) = \frac{dv(\vec{t})}{dt} = 0 + 2B\hat{j} + 0$$

המיקום בציר x הוא קבוע. בציר y יש תאוצה קבועה, ובציר z מהירות קבועה. הצורה של מסלול כזה היא פרבולה בצירי y ו z.

תרגיל 2238ו_1

א) בכדי שהאבנים יפגשו באוויר חייבים שברגע הפגיעה ושתי האבנים יהיו באותו המיקום.

נרשום את משוואות המקום של אבן 1 ו-2.



$$\begin{cases} x_1 = V\cos\varphi \cdot t \\ y_1 = V\sin\varphi \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = L \\ y_2 = V_0 \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

בשביל למצוא את המהירות נשווה את רכיבי ה-y.

$$V\sin\varphi \cdot \cancel{t} - \cancel{\tfrac{1}{2}gt^2} = V_0 \cancel{t} - \cancel{\tfrac{1}{2}gt^2}$$

$$V_0 = V\sin\varphi$$

הבנו שהמהירות חייבת להיות שווה למהירות בציר ה-y של אבן 1. סרטט
זה חייב להיות מכיוון שלשני הגופים יש את אותה תאוצה ולכן אם רוצים שהם
יהיו באותו הגובה ברגע מסוים הם חייבים להיות באותו גובה בכל רגע נתון.

ב) בכדי לבדוק את הזמן נסתכל על ציר ה-x.

$$L = V\cos\varphi \cdot t \Rightarrow t = \frac{L}{V\cos\varphi}$$

ג) בכדי למצוא את גובה המפגש נציב את הזמן למשוואת המקום בציר ה-y.

$$h = V\sin\varphi \cdot \frac{L}{V\cos\varphi} - \frac{1}{2} g \frac{L^2}{V^2\cos^2\varphi}$$

$$h = L\tan\varphi - \frac{gL^2}{2V^2\cos^2\varphi}$$

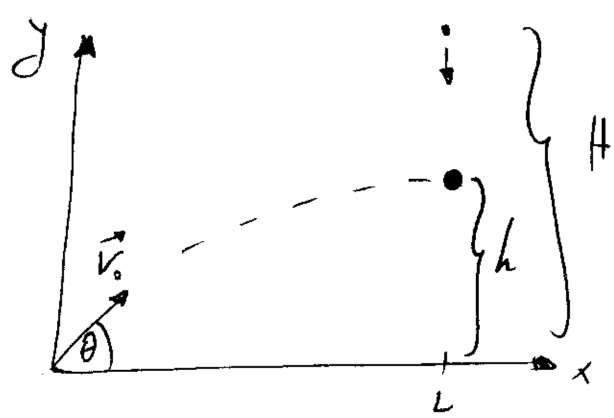
שאלה ממבחן 2005 מועד ג'

גוף נופל בנפילה חופשית ממנוחה מנקודה בגובה H.
ברגע שהגוף מתחיל ליפול נזרק גוף שני מהקרקע.
שני הגופים מתנגשים בגובה h מעל הקרקע.
המרחק האופקי בין הגופים הוא L

1) באיזו זווית מעל האופק נזרק הגוף השני?
2) באיזו מהירות $\vec{V_0}$ נזרק הגוף השני?
3) מהי מהירותו היחסית של הגוף השני ביחס לגוף הראשון ברגע הפגיעה?

<u>פתרון:</u>

* נכתוב את משוואות התנועה עבור 2 הגופים ולאחר מכן נציב את תנאי השאלה: מפגש בגובה h במרחק L



<u>גוף I:</u>

$$y_{(t)} = H - \frac{1}{2}gt^2$$

$$x_{(t)} = L$$

<u>גוף II:</u>

$$y_{(t)} = V_0 \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$x_{(t)} = V_0 \cos\theta \cdot t$$

1)

* נמצא כמה זמן לקח לגוף ה-I להגיע לגובה h

$$h = H - \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2(h-H)}{g}} = \tilde{t}$$ נסמן ב

* ידוע לנו כי בזמן $\tilde{t}$ גוף II נמצא בגובה h ובמרחק אופקי L ולכן:

(I) $L = V_0 \cos\theta \cdot \tilde{t}$

(II) $h = V_0 \sin\theta \cdot \tilde{t} - \frac{1}{2}g\tilde{t}^2 \Rightarrow V_0 \sin\theta \cdot \tilde{t} = h + \frac{1}{2}g\tilde{t}^2$

נחלק את II ב I ונקבל:

$$\tan\theta = \frac{h+\frac{1}{2}g\tilde{t}^2}{L}$$

נציב את $\tilde{t}$:

$$\tan\theta = \frac{\cancel{h}+\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{g}\cdot\frac{\cancel{2}(H-\cancel{h})}{\cancel{g}}}{L} = \boxed{\frac{H}{L}} \Rightarrow \boxed{\theta = \arctan\left(\frac{H}{L}\right)}$$

2) ע"מ למצוא את V_0 נשתמש במשוואה I

I) (אפשר להשתמש בזהות $1+\tan^2\theta = 1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$)

II) (או למצוא את רכיבי הוקטור V_0 ולמצוא מכן
למצוא את V_0 באמצעות פיתגורס)

נשתמש ב II:

$$L = V_0\cos\theta\cdot\tilde{t} \to V_0\cos\theta = \frac{L}{\tilde{t}} =$$

כמו שראינו קודם

$$= \frac{L}{\frac{2(H-h)}{g}} = \boxed{\frac{Lg}{2(H-h)}}$$

כמו כן ניתן להכפיל את המשוואה ב $\sin\theta$ ולחלק ב $\cos\theta$ ונקבל:

$$V_0\sin\theta = \frac{L}{\tilde{t}}\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{L}{\tilde{t}}\tan\theta = \frac{\cancel{L}}{\frac{2(H-h)}{g}}\cdot\frac{H}{\cancel{L}} = \boxed{\frac{Hg}{2(H-h)}}$$

$$|\vec{V}_0| = \sqrt{\left[\frac{Lg}{2(H-h)}\right]^2+\left[\frac{Hg}{2(H-h)}\right]^2} = \boxed{\frac{g}{2(H-h)}\sqrt{L^2+H^2}}$$

3) נגדיר מהירות יחסית :

$$V_{1y} = -gt \quad , V_{1x} = 0$$

$$V_{2y} = V_0 \sin\theta - gt \quad , V_{2x} = V_0 \cos\theta$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{V}_{rel} = \left(V_{2x} - V_{1x} \quad , V_{2y} - V_{1y} \right) =$$

$$= \left(V_0 \cos\theta - 0 \quad , V_0 \sin\theta - gt - (-gt) \right) =$$

$$\vec{V}_{rel} = \left(V_0 \cos\theta \quad , V_0 \sin\theta \right)$$

שאלה 1_2227 ־ זריקת תיק

2013

סטודנט להנדסת חשמל הגיע ראשון לכיתה לפני הרצאה חשובה במטרה לתפוס כסא באחת השורות הראשונות. לצערו הוא מגלה שסטודנטים רבים חוסמים את המעבר בדרך החוצה. הוא מחליט לזרוק את התיק שלו מעל הסטודנטים, המרוחקים ממנו מרחק L וגבוהים ממנו בגובה γL, על מנת לפגוע בשורות הראשונות.
חשבו מהי המהירות (גודל v_0 וזוית θ) כך שהתיק כמעט ופוגע בראשי הסטודנטים כשהוא מצוי בשיא הגובה.

פתרון

נבחר את הראשית להיות הנקודה ממנה זורק הסטודנט את התיק. בכיוון האופקי יש לנו תנועה קצובה (מהירות קבועה) ובכיוון האנכי תנועה בתאוצה קבועה:

$$\begin{aligned} v_x &= v_{0x} = v_0 \cos\theta \\ x &= x_0 + v_{0x}t = v_0 \cos\theta t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_y &= -g \\ v_y &= v_{0y} + a_y t = v_0 \sin\theta - gt \\ y &= y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

התיק כמעט ופוגע בראשי הסטודנטים, כלומר הנקודה $(L, \gamma L)$ מופיעה במסלול, ובנוסף המהירות בכיוון y בדיוק מעל ראשיהם שווה אפס:

$$\begin{aligned} v_y &= 0 = v_0 \sin\theta - gt \\ y &= \gamma L = v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2 \\ x &= L = v_0 \cos\theta t \end{aligned}$$

יש לנו 3 משוואות ו־3 נעלמים v_0, θ ו־t ולכן אנו מסוגלים לפתור את מערכת המשוואות.

$$\begin{aligned} v_0 \sin\theta &= gt \\ t &= \frac{L}{v_0 \cos\theta} \end{aligned}$$

נציב במשוואה של y:

$$\begin{aligned}\gamma L &= gt^2-\frac{1}{2}gt^2=\frac{1}{2}gt\cdot t=\frac{1}{2}v_0\sin\theta\frac{L}{v_0\cos\theta}=\frac{L}{2}\tan\theta\\ \theta &= \arctan\left(2\gamma\right)\end{aligned}$$

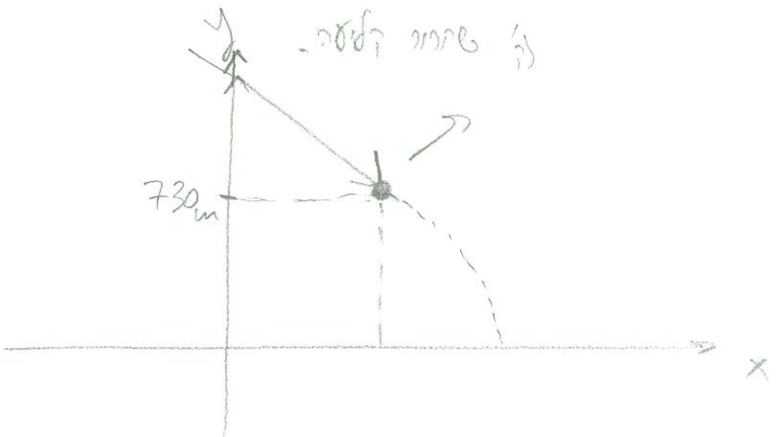
נמצא כעת את גודל המהירות v_0:

$$\begin{aligned}0 &= v_0\sin\theta-\frac{gL}{v_0\cos\theta}\\ 0 &= v_0^2\sin^2\theta-gL\tan\theta\\ v_0^2 &= \frac{gL\tan\theta}{\sin^2\theta}=\frac{gL\tan\theta}{1-\cos^2\theta}\end{aligned}$$

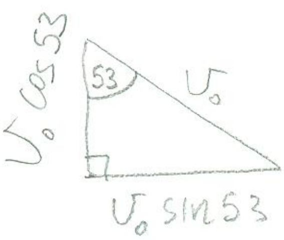
נעזר בזהות הטריגונומטרית:

$$\cos^2\theta=\frac{1}{1+\tan^2\theta}$$

$$\begin{aligned}v_0^2 &= \frac{gL\tan\theta}{1-\frac{1}{1+\tan^2\theta}}=\frac{gL\tan\theta}{\frac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}}=\frac{gL}{\tan\theta}\left(1+\tan^2\theta\right)\\ &= \frac{gL}{2\gamma}\left(1+4\gamma^2\right)=gL\left(\frac{1}{2\gamma}+2\gamma\right)\\ v_0 &= \sqrt{gL\left(\frac{1}{2\gamma}+2\gamma\right)}\end{aligned}$$



א. למטוס מהירות בעלת רכיב v_{0x} (רכיב אופקי) ו v_{0y} (רכיב אנכי)



$$v_{0x} = v_0 \sin 53$$
$$v_{0y} = v_0 \cos 53$$

המטוס משחרר קליעה בגובה 730m, המהירות ההתחלתית של הקליעה תהיה גם כמו מהירות המטוס, הקליעה פוגעת בקרקע כעבור 5 שניות לכן מה שמעניין אותנו זה ציר y. בציר y יש גם תאוצה שלילית כתוצאה מכוח משיכה לכן:

$$y = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2$$
$$= y_0 - (v_0 \cos 53) t - \frac{1}{2} g t^2$$
$$0 = 730 - (v_0 \cos 53) \cdot 5 - 5 \cdot (25) \quad , \quad g \approx 10 \left[\frac{m}{s^2}\right].$$
$$v_0 = \frac{121}{\cos 53} = 201.05 \left[\frac{m}{s}\right]$$

מצאנו את מהירות המטוס.

ג.

$$X = X_0 + V_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$a_x = 0 \ , \ V_{0x} = V_0 \sin 53 \ , \ X_0$$

$$X = (V_0 \sin 53) t = 201.05 \cdot \sin 53 \cdot 5 = 802.8 [m]$$

ד.

$$V_y = -V_{0y} - a_y t = -V_0 \cos 53 - g t = -171 \left[\frac{m}{s}\right]$$

$$V_x = V_{0x} = V_0 \sin 53 = 160.56 \left[\frac{m}{s}\right]$$

$t = 5 [s]$

$V_0 = 201.05 \left[\frac{m}{s}\right]$

סימן - בציר y מעיד כי הקליע נופל למטה וקבענו
את הכיוון בכיוון שלילי.

1_2301 פתרון:

א) בהינתן מהירות כפונקציה של זמן המיקום (קואורדינטה) ניתן ע"י הביטוי

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t')dt' \tag{1}$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [c_1 t' + c_2 {t'}^3]dt' \tag{2}$$

$$x(t) = x_0 + \frac{c_1}{2}(t^2 - t_0^2) + \frac{c_2}{4}(t^4 - t_0^4) \tag{3}$$

התאוצה מתקבלת ע"י גזירת המהירות:

$$a = \frac{dv}{dt} = c_1 + 3c_2 t^2 \tag{4}$$

ב) לפי הגדרת מהירות ממוצעת:

$$\bar{v}(t_1 < t < t_2) = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} \tag{5}$$

$$\bar{v}(0 < t < T) = \frac{x(T) - x(0)}{T} = \frac{c_1 T}{2} + \frac{c^2 T^3}{4} \tag{6}$$

$$T = 10 \text{ s}, \quad c_1 = 3 \text{ m}/s, \quad c_2 = 5 \text{ m}/s^3 \tag{7}$$

$$\bar{v}(0 < t < 10) = 1265 \text{ m/s} \tag{8}$$

ג) לפי הגדרת תאוצה ממוצעת:

$$\bar{a}(t_1 < t < t_2) = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} = c_1 + c_2(t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2) \tag{9}$$

$$\bar{a}(10 < t < 20) = 3503 \text{ m/s}^2 \tag{10}$$

ד) מהירות רגעית ברגע $t = 10$ s מתקבלת ע"י הצבה ישירה של הערכים המספריים בביטוי המהירות:

$$v(10) = 5030 \text{ m/s} \tag{11}$$