נחשב את המהירות שחייבת להיות לכדור בהגיעו לשיא הגובה על מנת שישלים סיבוב. נעשה זאת באמצעות שיקולי כוחות. בנקודת שיא הגובה:

$$\sum F_y = 0 = m\frac{v^2}{R} - mg - N \rightarrow N = m\left(\frac{v^2}{R} - g\right)$$

סיבוב שלם יושלם אם בנקודה הזו הנורמאל יהיה גדול מאפס, ולכן:

$$N = m\left(\frac{v^2}{R} - g\right) > 0 \rightarrow v^2 > gR$$

כעת, נחפש גובה שחרור שיניב מהירות שכזו בנקודה הקריטית. שיקולי שימור אנרגיה נותנים:

$$mgH = mg2R + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

נשתמש בעובדה שאין החלקה כך ש- $\omega = v/r$ ונציב את מומנט ההתמד הנתון בבעיה:

$$mgH = 2mgR + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2\right)\left(\frac{v^2}{r^2}\right) = 2mgR + \frac{7}{10}mv^2$$

נבודד את המהירות ונדרוש את התנאי שקיבלנו מקודם:

$$v^2 = \frac{10g}{7}\left(H - 2R\right) > gR \rightarrow \boxed{H > \frac{27}{10}R}$$

רצ'ט

קודם כל נתאר את כלל הכוחות בבעיה. על המוט פועלים:

- כוח הכובד ממרכז המוט כלפי מטה.
- הכוח שנובע מהציר המקובע למוט מימין למעלה. גודלו וכיוונו לא ידועים.
- כוח הנורמל בנקודה המגע עם הדיסקה, כלפי מעלה.
- כוח החיכוך עם הדיסקה. אם הדיסקה נעה ימינה, הוא פועל ימינה ולהפך.

על הדיסקה פועלים:

- כוח הכובד ממרכז הדיסקה.
- הכוח הנובע מהציר במרכז הדיסקה.
- כוח הנורמל בנקודת המגע עם המוט, כלפי מטה.
- כוח החיכוך בנקודת המגע עם המוט, פועל באופן מנוגד לחיכוך שפועל על המוט. אם הדיסקה נעה ימינה הוא פועל שמאלה ולהפך.

נוכל למצוא את גודל כוח החיכוך בעזרת חישובי מומנט על המוט בלבד. המוט לא זז ולא מסתובב, ולכן סכום הכוחות וגם סכום המומנטים עליו מתאפס. הכי נוח יהיה לחשב את המומנטים ביחס לציר הסיבוב, מכיוון שזה יחסוך לנו את הבירור לגבי הכוח שהציר עצמו מפעיל. זה משאיר שלושה כוחות שמפעילים מומנטים. נשים לפני כוח החיכוך סימן $\pm$, וכך נבצע את שתי האפשרויות במכה (שהחיכוך שמאלה או ימינה).

$$\begin{aligned}
\sum \tau &= 0 \\
\sum \tau &= Nl\sin\theta - mg\frac{l}{2}\sin\theta \pm fl\cos\theta = 0 \\
f &= \mu N \\
0 &= N - \frac{mg}{2} \pm \mu N\cot\theta = 0 \\
mg &= 2N\left(1 \pm \mu\cot\theta\right) \\
N &= \frac{mg}{2 \pm 2\mu\cot\theta} \\
f = \mu N &= \frac{\mu mg}{2 \pm 2\mu\cot\theta}
\end{aligned}$$

אחרי כל הסיפור הזה, יש לנו את גודל כוח החיכוך, עבור שתי האפשרויות (ימינה ושמאלה). נחשב את התאוצה הזוויתית של הדיסקה. אם נבחר כציר את ציר הסיבוב של הדיסקה, ישאר רק מומנט אחד. המומנט של הציר ושל הכובד מתאפסים מכיוון שמרחקם מהציר אפסי, והמומנט של הנורמל מתאפס מכיוון שהוא בכיוון הרדיאלי. רק החיכוך מפעיל מומנט. אם כך, משוואת התאוצה הזוויתית פשוטה למדי:

$$\begin{aligned}
\sum \tau &= I\alpha \\
\pm fR &= I\alpha \\
\alpha &= \pm\frac{fR}{I}
\end{aligned}$$

עכשיו אנחנו צריכים לשאול את עצמנו מה הקשר בין תאוצה לבין זמן העצירה. על פי הגדרה, השינוי במהירות הסיבובית הוא התאוצה הסיבובית, ובמקרה של תאוצה קבועה המהירות הזוויתית מקבלת ביטוי פשוט. בעזרתו ניתן להביע את זמן העצירה:

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t = 0$$
$$t = \frac{-\omega_0}{\alpha} = \frac{-\omega_0}{\pm\frac{fR}{I}}$$

בהנחה שהמהירויות ההתחלתיות שמאלה וימינה היו זהות (אבל עם סימנים מנוגדים), היחס הוא פשוט:

$$\frac{t_+}{t_-} = \frac{\frac{\omega_0}{\frac{f_+R}{I}}}{\frac{\omega_0}{\frac{f_-R}{I}}} = \frac{f_-}{f_+} =$$
$$= \frac{\frac{\mu mg}{2-2\mu\cot\theta}}{\frac{\mu mg}{2+2\mu\cot\theta}} = \frac{1+\mu\cot\theta}{1-\mu\cot\theta} = \frac{\tan\theta+\mu}{\tan\theta-\mu}$$

כשהפעולה האחרונה של המרת הקוטנגנס לטנגנס נעשתה רק כדי שמי שקיבל פתרון עם טנגנס ידע שגם הוא נכון.

התוצאה שקיבלנו חסרת יחידות, כנאה ליחסים. אופן הפתרון היה כזה: מצאנו את כוח החיכוך משיקולי סטטיקה של המוט, ואז חישבנו את השינוי בתאוצה של הגוף התחתון. השינוי בתאוצה הופכי לשינוי בזמן.

Parameters:

$L = 2[m]$,$m_1 = 5[kg]$,$m_2 = 0.01[kg]$,$v = 400[m/s]$,$x = 0.1[m]$

a. Conservation on angular momenta around the rod's axis (The gravity is parallel to the displacement vector):

$$L_z = (L - x)m_2 v \sin(90) = I\omega \tag{1}$$

The moment of inertia of the rod and the bullet is:

$$I = \frac{m_1 L^2}{12} + m_1(\frac{L}{2})^2 + m_2(L - x)^2 \tag{2}$$

So the angular velocity after the collision:

$$\omega = \frac{(L - x)m_2 v \sin(90)}{\frac{m_1 L^2}{12} + m_1(\frac{L}{2})^2 + m_2(L - x)^2} \tag{3}$$

b. The distance between the axis and the center of mass:

$$L_{cm} = \frac{m_1 \frac{L}{2} + m_2(L - x)}{m_1 + m_2} \tag{4}$$

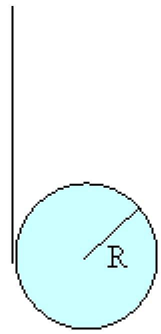
Using conservation of energy:

$$\frac{I\omega^2}{2} = (m_1 + m_2)gL_{cm}(1 - \cos\varphi) \tag{5}$$

$$(1 - \cos\varphi) = \frac{I\omega^2}{2g(m_1 \frac{L}{2} + m_2(L - x))} \tag{6}$$

$$\varphi = \cos^{-1}(1 - \frac{I\omega^2}{2g(m_1 \frac{L}{2} + m_2(L - x))}) \tag{7}$$

פתרון תרגיל 6409 1:



משוואת כוחות:

$$\sum F_y = ma = mg - T$$

משוואת מומנטים סביב מרכז המסה (נבחר את כיוון השעון ככיוון חיובי):

$$\sum \tau = I\alpha = TR$$

נפתור שתי משוואות בשני נעלמים, יחד עם הקשר $a = \alpha R$ הנובע מהעובדה שהיויו מתגלגל ללא החלקה ונקבל לבסוף:

$$\boxed{T = \frac{mgI}{I + mR^2} ; a = \frac{mgR^2}{I + mR^2}}$$

תרגיל <1 6420>

נכתוב את משוואות התנועה עבור המסות התלויות ובנוסף את משוואת המומנטים עבור הדיסקה הכפולה

נבחר צירים כלפי מטה עבור כל אחת מהמסות

$$\sum F = ma$$

$$\mathrm{M}_1 g - T_1 = M_1 a_1 \ \ , M_2 g - T_2 = M_2 a_2$$

$$\mathrm{M}_1 (g - a_1) = T_1 \quad , \quad M_2 (g - a_2) = T_2$$

נבחר ציר סיבוב במרכז הדיסקות וכיוון חיובי נגד כיוון השעון

$$\sum \tau = I\alpha$$

$$\sum \tau = T_2 r_2 - T_1 r_1 = I\alpha$$

כאשר מומנט ההתמד הוא

$$I = \frac{1}{2}(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)$$

עדיין יש לנו יותר נעלמים ממשוואות ולכן נצטרך למצוא את האילוץ

האילוץ ינבע מכך שהתנועה של החוטים היא ללא החלקה ולכן נקבל

$$a_1 = -\alpha r_1, \qquad a_2 = \alpha r_2$$

כעת נוכל לפתור את מה שנתבקשנו

א' – המערכת בשיווי משקל ולכן כל התאוצות שוות ל-0

מכאן נקבל

$$\mathrm{M}_1 g = T_1 \ \ , M_2 g = T_2$$

נציב במשוואת המומנטים

$$M_2 g r_2 = M_1 g r_1 \Rightarrow \frac{\mathrm{M}_2}{M_1} = \frac{r_1}{r_2}$$

ב' – נמצא את התאוצות של כל אחת מהמסות

$$M_2 (g - a_2) r_2 - \mathrm{M}_1 (g - a_1) r_1 = I\alpha$$

$$M_2 (g - \alpha r_2) r_2 - \mathrm{M}_1 (g + \alpha r_1) r_1 = I\alpha$$

נבודד את התאוצה הזוויתית

$$(M_2 r_2 - M_1 r_1) g = (I + M_2 r_2^2 + M_1 r_1^2)\alpha$$

$$\alpha = \frac{(M_2 r_2 - M_1 r_1)g}{(I + M_2 r_2^2 + M_1 r_1^2)}$$

צריך לשים לב שאנחנו לא מחלקים ב-0 אבל במקרה הזה כל הגדלים חיוביים

ולבסוף התאוצות של כל אחד מהגופים יהיו

$$a_1 = -\frac{(M_2 r_2 - M_1 r_1)g}{(I + M_2 r_2^2 + M_1 r_1^2)} r_1, \qquad a_2 = \frac{(M_2 r_2 - M_1 r_1)g}{(I + M_2 r_2^2 + M_1 r_1^2)} r_2$$

ex-12-02

ג1) מאין שימור אנרגיה :

$$E_i = E_f$$

$$mgh = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} m v^2$$

$$V = \omega R$$

$$mgh = \frac{1}{2} I \left(\frac{V}{R}\right)^2 + \frac{1}{2} m V^2$$

$$2mgh = V^2 \left(\frac{I}{R^2} + m\right)$$

$$V^2 = \frac{2gh}{\left(m + \frac{I}{R^2}\right)}$$

עבור גליל מלא:

$$I = \frac{1}{2} m R^2$$

$$V^2_{\text{גליל מלא}} = \frac{2gh}{\left(m + \frac{\frac{1}{2} m \cancel{R^2}}{\cancel{R^2}}\right)}$$

$$V^2_{\text{גליל מלא}} = \frac{4gh}{3m} \Rightarrow V_{\text{גליל מלא}} = \sqrt{\frac{4gh}{3m}}$$

עבור גליל ריק :

$$I = mR^2$$

$$V^2_{\text{גליל ריק}} = \frac{2gh}{2m} = \frac{gh}{m}$$

$$V_{\text{גליל ריק}} = \sqrt{gh/m}$$