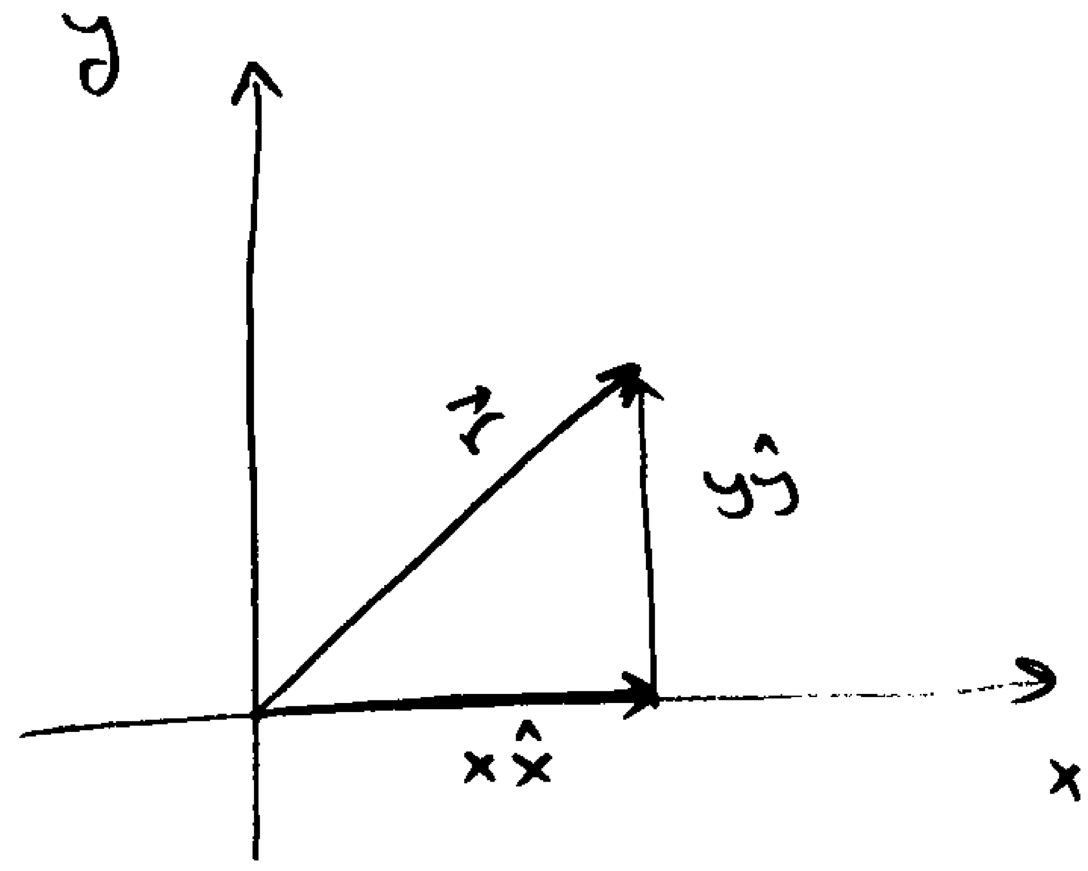
תרגול 3 - תנועה ב- 2D ו- 3D.



וקטור מיקום:

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} = (x, y)$$

וקטור העתק: $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

אם המיקום משתנה בזמן

$$\vec{r} \to \vec{r}(t) \Rightarrow x(t), y(t)$$

אז המהירות

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v_x}\hat{x} + \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{v_y}\hat{y} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y}$$

והתאוצה

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{\frac{dv_x}{dt}}_{a_x}\hat{x} + \underbrace{\frac{dv_y}{dt}}_{a_y}\hat{y} = a_x\hat{x} + a_y\hat{y}$$

משוואות הקינמטיקה בכמה מימדים

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

עבור תאוצה קבועה נרשום

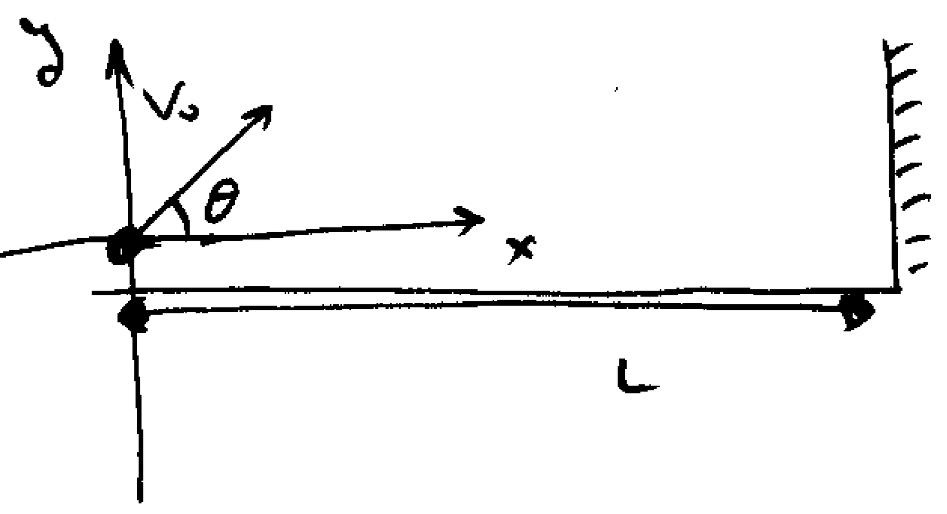
$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \quad ; \quad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{0x}t \\ v_{0y}t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_x t^2 \\ \frac{1}{2}a_y t^2 \end{pmatrix}$$

בעצם ניתן לרשום משוואה לכל ציר בנפרד.

שאלה 1

1.) נתחיל מרשום את משוואות המיקום עבור הכדור.



נרשום עבור ציר x וציר y בנפרד.

$\vec{g}$

התאוצה בבעיה היא תאוצה קבועה

$$\vec{a}=(0,-g)$$

ולכן ניתן לרשום:

$$x=v_0\cos\theta\cdot t \qquad y=v_0\sin\theta\cdot t-\frac{1}{2}gt^2$$

$$v_x=v_0\cos\theta \qquad v_y=v_0\sin\theta-gt$$

כעת ניגש לפתרון הסעיף. יכול להיות שהכדור לא פוגע בקיר ולכן צריך לוודא שהזמן שהכדור באוויר (מוגדר ע"פ ציר y) קצר יותר מהזמן שלוקח לכדור להגיע לקיר (מוגדר ע"פ ציר x).

את הזמן שהכדור נמצא באוויר נחשב לפי ציר y

$$y=0 \Rightarrow \quad 0=v_0\sin\theta\cdot t-\frac{1}{2}gt^2=t\left(v_0\sin\theta-\frac{1}{2}gt\right)$$

$$t=\frac{2v_0\sin\theta}{g}=\frac{2\cdot 25.3\sin 42^\circ}{10}=3.38s, \quad t\neq 0$$

נסמן את הזמן שהכדור יכול להיות באוויר בעזרת t_y.

הזמן שלוקח לכדור להגיע לקיר

$$x=L \Rightarrow \quad L=v_0\cos\theta\cdot t$$

$$t=\frac{L}{v_0\cos\theta}=\frac{21.8\,m}{25.3\,m/s\,\cos 42^\circ}=1.16\,s$$

נסמן את הזמן שלוקח לכדור להגיע לקיר בעזרת t_x.

מכיוון ש $t_y>t_x$ אז הזמן שהכדור באוויר לפני שפגע בקיר הוא

$t=1.16s$.

2.) נציב במיקום בציר ה-y את t_x

$$y(t_x) = v_0 \sin\theta\, t_x - \frac{1}{2} g t_x^2 = 25.3 \sin 42^\circ \cdot 1.16 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (1.16)^2 = 13\ m$$

3.) וקטור המהירות

$$\vec{v} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y}$$

$$v_x(t_x) = v_0 \cos\theta = 25.3 \cos 42^\circ = 18.8\ m/s$$

$$v_y(t_x) = v_0 \sin\theta - g t_x = 25.3 \sin 42^\circ - 10 \cdot 1.16 = 5.33\ m/s$$

$$\vec{v} = 18.8\ m/s\ \hat{x} + 5.33\ m/s\ \hat{y}$$

4.) ברגע הפגיעה

$$v_y(t_x) > 0$$

לכן, הכדור לא עבר את שיא הגובה.

א.)

$$\vec{r} = 1\,\tfrac{m}{s^2}\,t^2\,\hat{x} - 3\,\tfrac{m}{s}\,t\,\hat{y} + \left(2m + 3\,\tfrac{m}{s}\,t - 4.9\,\tfrac{m}{s^2}\,t^2\right)\hat{z}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2t\,\hat{x} - 3\hat{y} + (3 - 9.8t)\hat{z}$$

$$\vec{v}(t=0) = -3\hat{y} + 3\hat{z}$$

ב.)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 2\hat{x} - 9.8\hat{z}$$

ג.)

$$|\vec{a}(0)| = |\vec{a}(t)| = \sqrt{2^2 + (9.8)^2} \simeq \sqrt{100} = 10\,\tfrac{m}{s^2}$$

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{(2t)^2 + 3^2 + (3 - 9.8t)^2}$$

$$\hookrightarrow |\vec{v}(0)| = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}\,\tfrac{m}{s}$$

קינמטיקה

השלב הראשון הוא להגדיר מערכת צירים. בפתרון זה נבחר את הראשית בנקודת הזריקה, את כיוון y כלפי מעלה, ואת כיוון x ימינה.
את המהירות ההתחלתית נמיר לוקטור בצורה הבאה:

$$\vec{v}_0 = 25.3\frac{m}{s}\cdot\begin{pmatrix}\cos(42^\circ)\\ \sin(42^\circ)\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}18.8\frac{m}{s}\\ 16.9\frac{m}{s}\end{pmatrix}$$

תאוצת הנפילה החופשית במערכת הצירים שלנו היא:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}0\\ -g\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}0\\ -9.8\frac{m}{s^2}\end{pmatrix}$$

ולכן, נוסחאות המהירות והמיקום כפונקציה של הזמן הן:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t \approx \begin{pmatrix}18.8\frac{m}{s}\\ 16.9\frac{m}{s} - 9.8\frac{m}{s^2}t\end{pmatrix}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \vec{a}\frac{t^2}{2} \approx \begin{pmatrix}18.8\frac{m}{s}t\\ 16.9\frac{m}{s}t - 4.9\frac{m}{s^2}t^2\end{pmatrix}$$

1. כמה זמן נמצא הכדור באוויר בטרם הוא פוגע בקיר?
   נבדוק לפי נוסחת המיקום מתי הכדור נמצא במרחק האופקי המתאים לקיר.
   $$x = 18.8\frac{m}{s}t = 21.8m \Rightarrow t = \frac{21.8m}{18.8\frac{m}{s}} \approx 1.16s$$
2. כמה גבוה מעל נקודת הזריקה יפגע הכדור בקיר?
   נציב את זמן הפגיעה שמצאנו בסעיף הקודם ברכיב האנכי של נוסחת המיקום.
   $$y(t = 1.16s) = 16.9\frac{m}{s}\cdot 1.16s - 4.9\frac{m}{s^2}(1.16s)^2 \approx 13.0m$$
3. מהו וקטור מהירות הכדור ברגע הפגיעה בקיר?
   נציב את זמן הפגיעה בנוסחא הכללית שמצאנו למהירות.
   $$\vec{v}(t = 1.16s) = \begin{pmatrix}18.8\frac{m}{s}\\ 16.9\frac{m}{s} - 9.8\frac{m}{s^2}(1.16s)\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}18.8\frac{m}{s}\\ 5.5\frac{m}{s}\end{pmatrix}$$
4. האם הכדור עבר את נקודת שיא הגובה ברגע הפגיעה?
   מכיוון שרכיב המהירות בציר y שקיבלנו בסעיף הקודם חיובי, הכדור עודנו בתנועתו מעלה, ולא עבר את שיא הגובה.

ע)

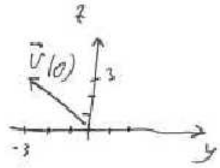
$$\vec{r} = t^2\hat{x} - 3t\hat{y} + (2+3t-4.9t^2)\hat{z}$$ (3

א. הכי קל לגזור:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2t\hat{x} - 3\hat{y} + (3-9.8t)\hat{z}$$

$$\vec{v}(0) = 0\hat{x} - 3\hat{y} + 3\hat{z}$$

המהירות ב- $t=0$



אפשר גם לראות ש- $x=t^2$.
כלומר התנועה בכיוון x היא בתאוצה קבועה (כלומר $x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$), ולכן:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ v_{0x} = 0 \\ a_x = 2\,\frac{m}{s^2} \end{cases}$$

ראיתי שגם ניתן לקבל את y_0, v_{0y}, a_y וכנ"ל ל- z.
אבל זה די מסורבל...

ב. הכי קל לגזור את $\vec{v}$:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 2\hat{x} + 0\hat{y} + (-9.8)\hat{z}$$

ג. ב- $t=0$: $|\vec{v}| = \sqrt{0^2+(-3)^2+3^2} = \sqrt{18}\,\frac{m}{s}$

$|\vec{a}| = \sqrt{2^2+0^2+(-9.8)^2} \simeq 10\,\frac{m}{s^2}$ (התאוצה קבועה
ולא תלויה
בזמן).