חישוב מומנט התמד של מערכת נקודות

מומנט ההתמד מוגדר :

$$I=\sum m_i r_i^2$$

שימו לב שהכוונה היא לציר שניצב לדף.

1. סביב מסה m1:

$$I=\sum m_i r_i^2 = m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 = m_2 L^2 + m_3(\sqrt{2}L)^2 = \frac{m}{2}L^2 + m2L^2 = \frac{5}{2}mL^2$$

2. סביב מסה m3:

$$I=\sum m_i r_i^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = m_1(\sqrt{2}L)^2 + m_2 L^2 = \frac{m}{2}2L^2 + \frac{m}{2}L^2 = \frac{3}{2}mL^2$$

3. על מנת לעבור לציר מקביל העובר דרך מרכז המסה, ניתן להשתמש במשפט שטיינר (זיכרו: המשפט נכון אך ורק למעבר מ/אל מרכז המסה!)
עלינו לברר את המרחק של מרכז המסה מאחד הצירים שכבר חישבנו. קודם כל נברר את מרכז המסה, במערכת הצירים שמופיעה בשאלה. בציר X נקבל:

$$X_{cm} = \frac{m_1 L + m_2 0 + m_3 0}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{\frac{m}{2}L}{2m} = \frac{L}{4}$$

ובציר Y:

$$Y_{cm} = \frac{m_1 0 + m_2 0 + m_3 L}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{mL}{2m} = \frac{L}{2}$$

עכשיו נותר לחשב את המרחק (בריבוע) בין מרכז המסה לאחת הנקודות שכבר חישבנו. אבחר את m1:

$$R_{cm\to m_1}^2 = (L - \frac{L}{4})^2 + \frac{L}{2}^2 = \frac{13}{16}L^2$$

ומשפט שטיינר נותן לנו:

$$I_{cm} = I m_1 - (m_1 + m_2 + m_3) R_{cm\to m_1}^2 = \frac{5}{2}mL^2 - 2m\frac{13}{16}L^2 = \frac{7}{8}mL^2$$

סמפור

הכוחות הפועלים על הקורה הם הכובד, והציר. מכיוון שאיננו יודעים איזה כוח מפעיל הציר, נשתמש במשוואות החוק השני לתנועה מעגלית, סביב ציר שנמצא בנקודת הציר. מכיוון שהמרחק בין הציר שבחרנו לנקודה שבה פועל כוח הציר הוא 0, הוא לא מפעיל מומנט. המומנט היחיד הוא של הכובד, שפועל כמובן ממרכז המסה. נחשב את התאוצה הזוויתית:

$$\sum \tau = mg\frac{L}{2}\cos\theta = I\alpha$$

נעביר אגף לקבלת:

$$\alpha = \frac{mgL\cos\theta}{2I}$$

נתנו לנו את מומנט ההתמד של הקורה יחסית לציר , $I = \frac{1}{3}mL^2$. נציב את זה:

$$\alpha = \frac{mgL\cos\theta}{2\cdot\frac{1}{3}mL^2} = \frac{3g\cos\theta}{2L}$$

וכך יש לנו ביטוי לתאוצה הזוויתית. ביקשו את התאוצה הקווית של שתי נקודות. נקודה B שנמצאת במרחק:

$$r_B = 0.4m = \frac{0.4m\cdot 0.5m}{0.5m} = 0.8L$$

ונקודה A שנמצאת במרחק:

$$r_A = 0.15m = \frac{0.15m\cdot 0.5m}{0.5m} = 0.3L$$

כדי למצוא את התאוצה הזוויתית של שתי הנקודות פשוט נציב בקשר $a = \alpha r$:

$$a_A = \alpha r_A = \frac{3g\cos\theta}{2L}0.3L = 0.45g\cos\theta$$
$$a_B = \alpha r_B = \frac{3g\cos\theta}{2L}0.8L = 1.2g\cos\theta$$

ביקשו גם באופן ספציפי כשהזווית היא $\theta = 50$. נציב:

$$a_A = 0.45g\cos\theta \approx 0.29g \approx 2.9\frac{m}{s^2}$$
$$a_B = 1.2g\cos\theta \approx 0.77g \approx 7.7\frac{m}{s^2}$$