מפתחות ותפיסתן

נבנה מערכת קואורדינטות, בה גובה הזריקה הוא 0, הציר החיובי כלפי מעלה, ורגע הזריקה הוא ב $t=0$.
במערכת זו, הנתונים שניתנו לנו הם:

- גובה החלון: $y_1 = h = 4m$
- רגע התפיסה: $t_1 = 1.5s$
- הגוף נמצא בנפילה חופשית, ולכן תאוצתו קבועה, ושווה ל: $a=-g\approx -10\frac{m}{s^2}$

מכיוון שהמפתח בנפילה חופשית עם תאוצה קבועה, ניתן להשתמש במשוואות שקיבלנו לתנועה בתאוצה קבועה:

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

למעשה, עבור רגע התפיסה, הכל נתון לנו פרט למהירות ההתחלתית:

$$y_1 = v_0 t_1 - \frac{g t_1^2}{2}$$

קצת אלגברה והעברת אגפים מביאה אותנו ל:

$$v_0 = \frac{y_1}{t_1} + \frac{g t_1}{2}$$

ומי שרוצה להציב:

$$v_0 = \frac{4m}{1.5s} + \frac{10\frac{m}{s^2}1.5s}{2} = \frac{61}{6}\frac{m}{s}$$

בסעיף הבא אנו נדרשים לחשב את מהירות המפתח ברגע התפיסה. הכל נתון לנו עכשיו, כולל המהירות ההתחלתית. נשתמש בנוסחא למהירות בתאוצה קבועה (שהיא כמובן הנגזרת של נוסחת המיקום):

$$v(t_1) = v_0 - g t_1 = \frac{y_1}{t_1} + \frac{g t_1}{2} - g t_1 = \frac{y_1}{t_1} - \frac{g t_1}{2}$$

נציב מספרים ונקבל:

$$v(t_1) = \frac{4m}{1.5s} - \frac{10\frac{m}{s^2}1.5s}{2} = -\frac{29}{6}\frac{m}{s}$$

התוצאה השלילית בעצם מראה לנו שהשותפה תפסה את המפתח במהלך ירידתו ולא עלייתו (בדר"כ באמת יותר נוח לתפוס ככה).

שימו לב: כרגיל, המשכנו כמה שאפשר עם אותיות לפני הצבת המספרים. כולל בהצבה של v_0. גם אם בהתחלה זה לא נראה רלוונטי, זה בטוח יותר אלגנטי, וגם עוזר להבנה הפיסיקלית. במקרה שלפנינו, רואים למשל שהגבהת הגובה (y_1) תעלה את מהירות הזריקה ומהירות בתפיסה בדיוק באותה מידה.

המכונית נעה במהירות קבועה v במשך זמן T ולאחר מכן בתאוצה קבועה $-a$.
נסמן את זמן התנוע בתאוצה קבועה עד לעצירה ב t, אז

$$v - at = 0$$

$$t = v/a$$

כיוון המהירות לא משתנה, לכן כל הדרך שעוברת המכונית עד העצירה היא

$$s = vT + (vt - at^2/2) = vT + \frac{v^2}{2a} \approx 85.5\, m$$

כדי שלא תהיה תאונה, המרחק עד המשאית חייב להיות לא פחות מזה.

א) את התאוצה והמיקום נחשב בעזרת משוואות הקינמטיקה

$$a = \frac{dv}{dt} \qquad v = \frac{dx}{dt}$$

$$\downarrow$$

$$x = \int v\,dt$$

לכן

$$a = 3\frac{m}{s^2} + 15\frac{m}{s^4}t^2$$

והמיקום

$$x = \int(3t + 5t^3)dt = \frac{3}{2}t^2 + \frac{5}{4}t^4 + C_1$$

כאשר נתון שב- $t = 3\,sec$ אז $x = 15m$ לכן

$$x(t=3) = \frac{3}{2}(3)^2 + \frac{5}{4}(3)^4 + C_1 = 15$$

$$C_1 = -99.75\,m$$

כלומר

$$x(t) = -99.75m + \frac{3}{2}\frac{m}{s^2}t^2 + \frac{5}{4}\frac{m}{s^4}t^4$$

ב) את המהירות הממוצעת נמצא בעזרת הביטוי

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$$

כאשר $t_2 = 10$ ו- $t_1 = 0$.

$$\langle v \rangle = \frac{\cancel{-99.75} + \frac{3}{2}(10)^{2} + \frac{5}{4}(10)^{4} - (\cancel{-99.75})}{10} = 1265\ m/s$$

ג) התאוצה הממוצעת היא

$$\langle a \rangle = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$$

כאשר $t_2 = 20$ ו- $t_1 = 10$

$$\langle a \rangle = \frac{3\times(20) + 5(20)^3 - (3\times(10) + 5(10)^3)}{10} = 3503\ m/s^2$$

3.) המהירות הרגעית ב $t=10\ sec$

$$V(t=10)=3\times10+5\times(10)^3=5030\ m/s$$

נשים לב כי יוצא לנו שהמהירות הרגעית ב-$t=10$ והמהירות הממוצעת ב-$t=10$ שונות! זה כמובן חייב להיות מפני שהמהירות הממוצעת מחשבת כאילו יש מהירות קבועה לאורך כל הדרך ואילו המהירות הרגעית יכולה להשתנות.

פתרון שאלה 1:

א. על מנת שהיחידות של g תהיינה כאלו של תאוצה, נדרוש כי $\frac{\mathrm{m}}{\sec^2}=\left[g\left(t\right)\right]=\left[g_0\right]\left[t\right]$ ונקבל-

$$\left[g_0\right]=\frac{\mathrm{m}}{\sec^2\left[t\right]}=\boxed{\frac{\mathrm{m}}{\sec^3}}$$

ב. בציר x לא פועלים כוחות, ולכן התנועה היא במהירות קבועה- $x\left(t\right)=v_{0x}t=v_0\cos\left(\alpha\right)t$.

בציר y ישנה הגרביטציה שתלויה בזמן לפי הנתון. היות והתנועה אינה תנועה בתאוצה קבועה, יש לפתח את משוואות התנועה מההתחלה. ראשית המהירות:

$$v_y\left(t\right)=\int a_y\left(t\right)dt=-\int g\left(t\right)dt=-g_0\int tdt=-\frac{1}{2}g_0t^2+v_{0y}$$

ואז ההעתק:

$$y\left(t\right)=\int v_y\left(t\right)dt=\int\left(v_{0y}-\frac{1}{2}g_0t^2\right)dt=v_{0y}t-\frac{1}{6}g_0t^3$$

כאשר כאן השתמשנו בעובדה ש- $y\left(t=0\right)=0$. נציב את המהירות ההתחלתית בציר y ונקבל כי משוואות התנועה הן-

$$\boxed{\begin{gathered}x\left(t\right)=v_0\cos\left(\alpha\right)t\\ y\left(t\right)=v_0\sin\left(\alpha\right)t-\frac{1}{6}g_0t^3\end{gathered}}$$

ג. מרחק הפגיעה מאופיין ע"י $y\left(t\right)=0$. נציב ונפתור ל- t:

$$v_0\sin\left(\alpha\right)t-\frac{1}{6}g_0t^3=0$$
$$t=\sqrt{6\frac{v_0}{g_0}\sin\left(\alpha\right)}$$

נבדוק יחידות: $\left[t\right]=\sqrt{\left[\frac{v_0}{g_0}\right]}=\sqrt{\frac{\frac{\mathrm{m}}{\sec}}{\frac{\mathrm{m}}{\sec^3}}}=\sqrt{\sec^2}=\sec$. כעת נציב את התוצאה במשוואת התנועה שקיבלנו עבור ציר x, וממנה נקבל את המרחק-

$$x=v_0\cos\left(\alpha\right)t=v_0\cos\left(\alpha\right)\sqrt{6\frac{v_0}{g_0}\sin\left(\alpha\right)}=\boxed{\sqrt{6\frac{v_0^3}{g_0}\cos^2\left(\alpha\right)\sin\left(\alpha\right)}}$$

ד.   שיא הגובה נתון ע"י הנקודה שבה המהירות בציר y מתאפסת. נדרוש זאת:

$$v_y\left(t\right)=-\frac{1}{2}g_0t^2+v_0\sin\left(\alpha\right)=0$$
$$t=\sqrt{2\frac{v_0}{g_0}\sin\left(\alpha\right)}$$

ונציב למשוואת התנועה שקיבלנו עבור ציר ה- y:

$$y=v_0\sin\left(\alpha\right)t-\frac{1}{6}g_0t^3=v_0\sin\left(\alpha\right)\sqrt{2\frac{v_0}{g_0}\sin\left(\alpha\right)}-\frac{1}{6}g_0\left(2\frac{v_0}{g_0}\sin\left(\alpha\right)\right)^{3/2}$$