נכתב ע"י עומר גולדברג ויאיר מזל

Physics1B 2017A

תרגול 9 – תנע ומרכז מסה

תנע

התנע מוגדר בצורה הבאה:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$
$$[p] = \frac{kg \cdot m}{s}$$

במידה ועל מערכת פועלים כוחות חיצוניים (ובהנחה שהמסה קבועה), ניתן לרשום את החוק השני של ניוטון בצור הבאה:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

ובצורה מילולית: סכום הכוחות הפועלים שווה לקצב השינוי של התנע.

במידה וסכום בכוחות החיצוניים הוא אפס:

$$\sum \vec{F}_{ext} = 0 = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow \vec{p} = const$$

ובצורה מילולית: במידה ואין כוחות חיצוניים התנע נשמר (הוא קבוע תנועה), ואז התנע בכל שתי נקודות זמן הוא זהה: $\vec{p}_i = \vec{p}_f$.

מערכת חלקיקים

כאשר אנו דנים במערכות חלקיקים הדבר בראשון שיש לשים אליו לב, הוא שהגדרת המערכת היא דבר נזיל. אנחנו מחליטים מה נחשב חלק מהמערכת ומה נחשב חלק מהסביבה לפי הנוחות שלנו בבעיה.

לאחר שהגדרנו מערכת בעלת N חלקיקים, ניתן להגדיר עבורה תנע בתור סכום התנעים:

$$\vec{p}_{sys} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i$$

אם נסמן את הכוח השקול (סכום הכוחות) הפועלים על החלקיק ה – i, בתור $\vec{F}_{tot,i}$, אזי ניתן לסכום את הכוחות הפועלים על כלל המערכת, ולרשום את החוק השני עבור המערכת כולה בתור:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{tot,i} = \frac{d\vec{p}_{sys}}{dt}$$

צורת הכתיבה הזו אמנם נכונה, אבל יש דרך טובה יותר לכתוב את הדברים, בכדי לשים לב לעובדה נוספת. ניתן לבצע חלוקה קונספטואלית של כלל הכוחות בבעיה <u>לכוחות פנימיים וחיצוניים</u>.

- כוחות פנימיים הם כוחות שפועלים בין שני הגופים המהווים חלק מהמערכת.
- כוחות חיצוניים יהיו כוחות שהסביבה החיצונית מפעילה על המערכת.

בהתאם לצורת המחשבה הזו ניתן לרשום את המשוואה הבאה בצורה אחרת:

$$\sum \vec{F}_{external} + \sum \vec{F}_{internal} = \frac{d\vec{p}_{sys}}{dt}$$

בביטוי האחרון לא הבחנו בין הכוחות על פי הגופים עליהם הם פועלים, אלא פשוט סכמנו על כל הכוחות לפי החלוקה המוצעת. **מאחר ועבור כל כוח פנימי יש כוח שווה בגודלו והפוך בכיוונו (החוק השלישי של ניוטון) בהכרח הסכום הזה מתאפס** ($\sum\vec{F}_{internal}=0$). לסיכום נשארנו עם הביטוי:

$$\sum\vec{F}_{external}=\frac{d\vec{p}_{sys}}{dt}$$

מתקף

מתקף מוגדר כשינוי בתנע של המערכת.

$$\vec{J}=\Delta\vec{p}=\vec{p}_f-\vec{p}_i$$

כלומר שאם התנע נשמר במערכת, המתקף הוא אפס.

מרכז מסה

עבור מערכת עם מספר גופים, הגדרת מיקום מרכז המסה היא:

$$\vec{r}_{cm}=\frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

כאשר m_i היא מסת החלקיק ה – i, ו – $\vec{r}_i$ הוא מיקום החלקיק ה – i.

שאלות מסוימות עם מספר גופים, קל יותר לפתור במערכת מרכז המסה.

מהירות מרכז המסה (נגזור את הביטוי המופיע מעלה):

$$\vec{v}_{cm}=\frac{d\vec{r}_{cm}}{dt}=\frac{d}{dt}\frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_i m_i}=\frac{\sum_i m_i\frac{d\vec{r}_i}{dt}}{\sum_i m_i}=\frac{\sum_i m_i\vec{v}_i}{\sum_i m_i}$$

$$\vec{p}_{cm}=\sum_i m_i\vec{v}_i=\sum_i\vec{p}_i=\vec{p}_{sys}$$

לפי ההגדרות שראינו לפני כן:

$$\sum_i\vec{F}_i=\sum_i\frac{d\vec{p}_i}{dt}=\frac{d\vec{p}_{cm}}{dt}=M\vec{a}_{cm}$$

כאשר $M=\sum_i m_i$

המשמעות היא שאם אין כוחות חיצוניים למערכת (כלומר שכל הכוחות הם פנימיים ולכן לפי החוק השלישי מבטלים אחד את השני), תאוצת מרכז המסה היא 0, כלומר מהירות מרכז המסה נשמרת.

<u>תרגיל 1 <1_4600></u>

$$M_o = 16M_p$$

$$\mathrm{M_H} = 1M_p$$

$$1\text{Å} = 10^{-10}m$$

נקבע את מערכת הצירים כך שראשיתה תהיה במולקולה O ומולקולות המימן יהיו סימטרית סביב ציר ה – x. מיקום האטומים ביחס למערכת הצירים:

$$\vec{r}_O = (0,0)\text{Å}$$

$$\vec{r}_{H_1} = (\cos 53°, \sin 53°)\text{Å} \approx (0.6,0.8)\text{Å}$$

$$\vec{r}_{H_2} = (\cos 53°, -\sin 53°)\text{Å} \approx (0.6,-0.8)\text{Å}$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{3} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{3} m_i} = \frac{M_0(0,0) + M_H(0.6,-0.8) + M_H(0.6,-0.8)}{M_O + M_H + M_H} = \frac{M_p(1.2,0)\text{Å}}{18M_p}$$
$$= (0.067,0)\text{Å}$$

תרגיל 2 <4503_1>

הכוחות החיצוניים היחידים שפועלים על המערכת הם הכוח הנורמלי מהרצפה, וכוח המשיכה. שניהם פועלים בכיוון אנכי, ולכן בכיוון האופקי (ציר x) יש שימור תנע.

א. בכדי לוודא שהמסה m לא עוברת לצד שני נדרוש שהמהירות היחסית בין הגופים כאשר המסה בראש הגוף היא 0. במילים אחרות, אנחנו צריכים לדרוש שהמהירות שלהם זהה כאשר המסה m בראש העגלה.
נבחר שתי נקודות, הנקודה ההתחלתית בתחתית המישור שם אנו יודעים את המהירויות, ושניה היא בראש המישור המשופע (נקודת העניין שלנו).
שימור תנע בין הנקודות (בציר x בלבד):

$$p_{A,x} = mv_0 + 0$$
$$p_{B,x} = (m+M)v_B$$
$$p_{A,x} = p_{B,x}$$
$$\Rightarrow v_B = \frac{mv_0}{m+M}$$

בנוסף אין כוחות לא משמרים בבעיה, ולכן ניתן גם לרשום משוואת שימור אנרגיה:

$$E_A = \frac{mv_0^2}{2}$$
$$E_B = \frac{(m+M)v_B^2}{2} + mgh$$

נפתור את המשוואות עבור h:

$$h = \frac{v_0^2}{2g}\left(\frac{M}{(m+M)}\right)$$

ב. נגדיר נקודה שלישית כנקודה שבה המסה חוזרת למטה, ונרשום ביטויים עבור התנע והאנרגיה בנקודה זו:

$$p_{C,x} = mv_{C,m} + Mv_{C,M}$$
$$E_C = \frac{mv_{C,m}^2}{2} + \frac{Mv_{C,M}^2}{2}$$

שוב נרשום שימור תנע ואנרגיה:

$$mv_0 = mv_{C,m} + Mv_{C,M}$$
$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_{C,m}^2}{2} + \frac{Mv_{C,M}^2}{2}$$

נפתור המשוואות:

$$v_{C,m} = v_0 - \frac{Mv_{C,M}}{m}$$
$$\Rightarrow mv_0^2 = m\left(v_0 - \frac{Mv_{C,M}}{m}\right)^2 + Mv_{C,M}^2$$
$$\Rightarrow \frac{M}{m}(m+M)v_{C,M}^2 - 2Mv_0v_{C,M} = 0$$

למשוואה זו שני פתרונות. הראשון הוא $v_{C,M} = 0$, שמייצג את המצב ההתחלתי. הפתרון השני הרלוונטי למצב הסופי:

$$v_{C,M} = \frac{2mv_0}{m+M}$$

ואז:

$$v_{C,m} = v_0 - \frac{2Mv_0}{m+M} = \frac{v_0(m-M)}{m+M}$$

כדי להבין למה זה הפתרון הרלוונטי ניתן לשים לב שבפתרון השני המהירות של המסה הקטנה ביחס לעגלה היא ימינה. זה כמובן לא מתאים למקרה שלנו.

תרגיל 3 <1_4601>

אנחנו חושבים על המערכת בתור חוקרת + דוב. מאחר ואין חיכוך (הנחה) התנע הכולל של המערכת (שהוא גם התנע של מרכז המסה נשמר).במקרה זה גם מיקום מרכז המסה נשמר, זאת מכיוון שמירות מרכז המסה ההתחלתית היא 0.

נבחר את ראשית הצירים במרכז המסה, ונסיק שבכל זמן מיקום מרכז המסה היא בראשית.

מצד שני החוקרת לא יודעת איפה נמצא מרכז המסה, (מאחר והיא לא יודעת את מסת הדוב). למרות זאת היא יכולה לסמן את המקום בו היא נמצאת ובו נמצא הדוב.

נסמן את המיקום ההתחלתית של הביולוגית ב- x_r, ושל הדוב ב- x_b. נוכל אם כך לרשום ביטוי עבור מיקום מרכז המסה:

$$\frac{m_r x_r + m_b x_b}{m_r + m_b} = 0$$
$$\to m_r x_r = -m_b x_b$$

כעת מה שהיא יכולה לעשות זה למשוך את החבל ולמדוד בכמה כל אחד מהם זז. נרשום ביטוי למיקום מרכז המסה אחרי המשיכה (נזכור שהוא עדיין בראשית):

$$\frac{m_r(x_r + \Delta x_r) + m_b(x_b + \Delta x_b)}{m_r + m_b} = 0$$
$$\to -\frac{\Delta x_r}{\Delta x_b} = \frac{m_b}{m_r}$$

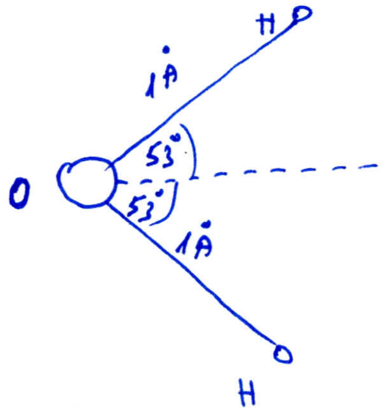
הסימן השלילי הוא לגיטימי שכן היחס משמאל בהכרח שלילי. זה מכיוון שכשהיא מושכת את החבל כיווני התנועה שלהם הפוכים, ולכן אחד ההעתקים יהיה חיובי והשני שלילי.

תרגיל I:

מהו מיקום מרכז המסה של מולקולת מים?

מולקולת המים מתוארת בשרטוט.

$$\begin{bmatrix} M_O = 16\, m_p \\ M_H = 1\, m_p \end{bmatrix}$$



פתרון:

נמצא את וקטור המיקום של כל אטום במולקולה כאשר נקבע את מרכז הצירים במיקום של אטום החמצן.

$$r_O = (0,0)$$

$$r_{H_1} = (1\cdot\cos\theta,\ 1\cdot\sin\theta)$$

$$r_{H_2} = (1\cdot\cos\theta,\ -1\cdot\sin\theta)$$

$$r_{c.m.} = \frac{\sum_i M_i r_i}{\sum_i M_i}$$

* נשתמש כעת בנוסחה עבור מרכז המסה ונפרק לצירים:

$$\Downarrow$$

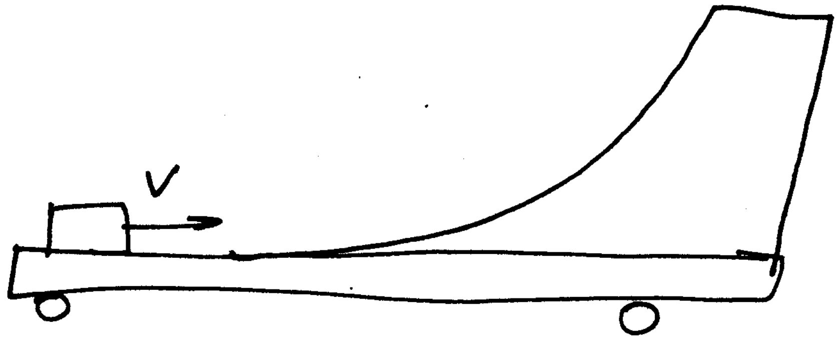
$$Y_{c.m.} = \frac{\sum_i M_i y_i}{\sum_i M_i} = \frac{0 + 1m_p \sin\theta - 1m_p\cdot\sin\theta}{18\, m_p} = 0$$

$$X_{c.m.} = \frac{\sum_i M_i x_i}{\sum_i M_i} = \frac{0 + 1m_p\cos\theta + 1m_p\cos\theta}{18\, m_p} = \frac{2\cos\theta}{18} = 0.067\ \text{Å}$$

$$r_{c.m.} = (0.067,\ 0)\ \text{Å}$$

3/

עגלה שמסתה 10kg נמצאת על משטח ללא חיכוך. על העגלה שמה מסה ~~של~~ של 1kg. אם נותנים למסה זו מהירות של $V = 5\,m/sec$.



א. מה הגובה המקסימלי h של המסה שימדוד אם מגיעה המסה לשיא.

ב. מה המהירות של העגלה והמסה כאשר המסה תחזור לנקודת ההתחלה.

אין חיכוך בין העגלה והמסה

נסמן m - מסה M - עגלה

לפי חוק שימור התנע:

$$\underbrace{mV}_{\text{תנע לפני}} = \underbrace{(m+M)u}_{\text{תנע אחרי}}$$

$$\Rightarrow u = \frac{mV}{(m+M)}$$ מהירות העגלה והמסה

לפי חוק שימור אנרגיה:

$$\frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}(m+M)u^2 + mgh$$

4

$$\cancel{\tfrac{1}{2}} m v^2 = \cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{(m+M)} \frac{(mv)^2}{(m+M)^{\cancel{2}}} + 2mgh$$

$$\cancel{\tfrac{1}{2}} m v^2 = \cancel{\tfrac{1}{2}} \frac{(mv)^2}{(m+M)} + 2mgh$$

$$\cancel{m} v^2 - \frac{(\cancel{m} v)^2}{(m+M)} = 2\cancel{m} g h$$

$$\frac{v^2}{2g}\left[1 - \frac{m}{(m+M)}\right] = h$$

$$\boxed{h = \frac{v^2}{2g}\left[\frac{M}{m+M}\right]}$$

הגובה המקסימלי
כזה שהמסה לא תעבור
לצד שני

ג. כאשר המסה חוזרת לנקודת התחלה:

שימור תנע:

$$\text{I} \quad (m+M)u = mv_1 + Mv_2$$

שימור אנרגיה:

$$\text{II} \quad \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_2^2$$

פיתרון 2 שימור תנע ואנרגיה

$$\mathrm{I} \quad \cancel{(m+M)}\cdot\frac{mv}{\cancel{(m+M)}} = mV_1 + MV_2$$

$$\mathrm{I} \quad mV^2 = mV_1^2 + MV_2^2$$

נציב מספרים:

$$5 = V_1 + 10V_2$$

$$25 = V_1^2 + 10V_2^2$$

נפתור ונקבל:

$$V_1 = -4.09\ m/sec$$

$$V_2 = 0.91\ m/sec$$

המסה הקטנה חוזרת נגד מגמה שהתחילה.

מדידת דובים בשנתם

כפי שהציור המצורף לשאלה רומז, הפתרון מבוסס על מרכז המסה.

בהעדר כוחות חיצוניים, מרכז המסה של מערכת החוקרת + דוב נשאר במקומו. החוקרת קושרת חבל לדוב, ומחזיקה את קצהו השני. כמו כן, היא מסמנת את מיקומה הנוכחי על הקרח.

אם נסמן את ראשית הצירים במרכז המסה, נוכל למצוא את קשר בין מרחק החוקרת ממרכז המסה למרחק הדוב ממרכז המסה:

$$\frac{m_p(-x_p)+m_bx_b}{m_p+m_b}=0$$
$$m_px_p=m_bx_b$$

מין הסתם, החוקרת לא יודעת בתחילה איפה נמצא מרכז המסה, ולכן המשוואה הזו לבדה לא עוזרת לה. השיטה היא למשוך קצת בחבל, ולמדוד את השינוי במיקום שלה ושל הדוב (ניתן למדוד את שלה ואת אורך החבל ולהסיק את השינוי במיקום הדוב אם רוצים). נסמן את המיקום החדש של החוקרת $\tilde{x_p}=x_p+\Delta x_p$, ואת המיקום החדש של הדוב ב : $\tilde{x_b}=x_b+\Delta x_b$.

אמרנו שהיחס צריך לעבוד תמיד, ולכן נוכל להציב את המרחקים החדשים:

$$m_p\tilde{x_p}=m_b\tilde{x_b}$$
$$m_px_p+m_p\Delta x_p=m_bx_b+m_b\Delta x_b$$

נחסר ממשוואה זו את המשוואה שהייתה לנו למיקומים ההתחלתיים לקבל:

$$m_p\Delta x_p=m_b\Delta x_b$$
$$m_b=m_p\frac{\Delta x_p}{\Delta x_b}$$

כך, על ידי מדידת השינוי במיקום החוקרת והדוב, ניתן לגלות את מסת הדוב.

כאשר יש חיכוך במשטח, יש כוחות חיצוניים, ולכן התנע לא ישמר, ומרכז המסה בהחלט יכול לזוז.