נכתב ע"י עומר גולדברג

Physics1B_2017A

תרגול 6 – חיכוך ותנועה מעגלית

<u>חיכוך</u>

כוח הנובע ממגע בין שני משטחים. אם יש כוח חיצוני הפועל על גוף בניסיון לייצר תנועה, ייווצר כוח בכיוון ההפוך כתוצאה מחיכוך. אם אין תנועה יחסית בין המשטחים, החיכוך יהיה סטטי ואם יש, הוא יהיה קינטי.

החיכוך הסטטי המקסימלי (לפי שהגוף מתחיל לבצע תנועה בכיוון הכוח החיצוני) מוגדר להיות

$$f_{s,max} = \mu_s N$$

כאשר μ_s הוא מקדם החיכוך הקינטי, וN הוא הנורמל. אם מפעילים כוח כך ש$F > f_{s,max}$ הגוף יתחיל לנוע, ולכן המשואה הנ"ל מגדירה קריטריון לסף תנועה.

כאשר הגוף בתנועה, כוח החיכוך יהיה

$$f_k = \mu_k N$$

כאשר כיוון של כוח החיכוך הקינטי הוא מקביל למשטח ומנוגד לכיוון התנועה.

<u>תנועה מעגלית</u>

תזכורת מתרגול תנועה מעגלית:

- <u>תאוצה רדיאלית</u>: מאונכת למהירות.

$$a_{rad} = R\dot{\theta}^2 = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

- <u>תאוצה משיקית</u>: מקבילה למהירות

$$a_{tan} = R\ddot{\theta} = \frac{dv}{dt}$$

- כשנרצה לפתור תרגילים בתנועה מעגלית בעזרת חוקי ניוטון, תמיד נבחר מערכת צירים המכבדת את הדינמיקה. **לפיכך תמיד נבחר מערכת צירים בעלת ציר משיק לתנועה וציר רדיאלי**.
- בחירת אחרת של מערכת צירים תהיה בעייתית, שכן בחירה של מערכת צירים קבועה (קרטזית), תיצור מצב שבו הכוח משתנה בזמן (לפחות כיוונו ואולי גם גודלו. כובדה זו תקשה מאוד על הפתרון.

<u>שאלה 1 <3108 1></u>

$$x_0 = x(t=0) = 0$$

$$v(t=0) = v_0$$

יש למצוא את התאוצה של הגוף

$$f_k = \mu_k N$$

בציר y

$$N - mg = 0 \rightarrow N = mg$$

בציר x

$$-f_k = ma \rightarrow \ -\mu_k N = ma$$

$$-\mu_k mg = ma \rightarrow a = -\mu_k g$$

התאוצה קבועה, אבל μ_k לא ידוע, לכן נרצה למצוא את התאוצה בדרכים אחרות ולבטא באמצעות המהירות ההתחלתית והמרחק. ניתן להשתמש במשוואות התנועה כדי לקבל את הקשר.

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

ואם נציב את הנתונים בשאלה (המהירות במיקום הגוף הסופי היא 0)

$$0 = v_0^2 + 2a(L - 0)$$

$$a = -\frac{v_0^2}{2L}$$

א. הזמן מתוך משוואת המהירות כפונקציה של זמן

$$0 = v_0 + at$$

$$t = -\frac{v_0}{a} = -\frac{v_0}{-\frac{v_0^2}{2L}} = \frac{2L}{v_0}$$

ב. מהשוואת שתי המשוואות על התאוצה נקבל

$$a = -\frac{v_0^2}{2L} = -\mu_k g \rightarrow \mu_k = \frac{v_0^2}{2gL}$$

שאלה 2 <1_3132>

אנחנו רוצים שהמסה תנוע בתנועה מעגלית ברדיוס קבוע. אם נרצה לחשב את רדיוס התנועה:

$$\frac{h}{R} = \tan\alpha \rightarrow R = h\tan\alpha$$

יש לנו כאן שתי אפשרויות למערכות צירים – מערכת המעבדה או המערכת שנעה עם הקונוס.

במקרה הזה יהיה לנו קל יותר לעבוד במערכת המעבדה. במערכת זו אנחנו מצפים לראות את המסה עושה תנועה מעגלית בגובה קבוע, כלומר שהתאוצה תהיה תאוצה רדיאלית בלבד ותלויה במהירות הזוויתית שמסובבים את הקונוס

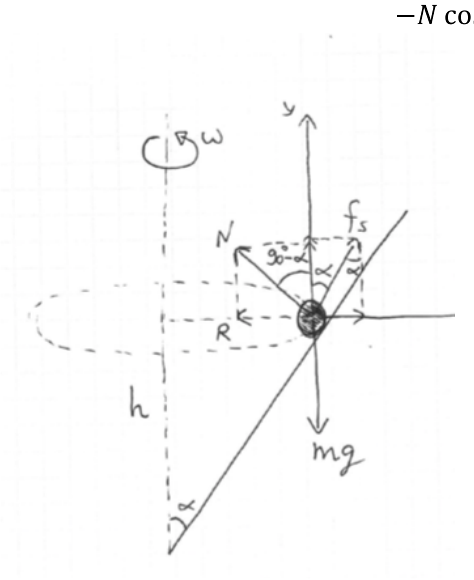
$$a_r = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

נשרטט כוחות על המסה כאשר חשוב לזכור שהחיכוך הסטטי יכול להיות במעלה הקונוס או הפוך.

נניח שהחיכוך הוא במעלה הקונוס, נקבל משוואת כוחות:

ציר x (רדיאלי):

$$-N\cos\alpha + f_s\sin\alpha = m\,a_r = -m\omega^2 R = -m\omega^2 h\tan\alpha$$



ציר y (משיקי):

$$N\sin\alpha + f_s\cos\alpha - mg = 0$$

כוח החיכוך המקסימלי מקיים את הקשר

$$f_{s_{max}} = \mu_s N$$

כך שהמשוואות הן

$$N\cos\alpha - \mu_s N\sin\alpha = m\omega^2 h\tan\alpha$$

$$N\sin\alpha + \mu_s N\cos\alpha = mg$$

אם נחלק משוואה אחת בשנייה נקבל

$$\omega^2\left(\frac{h\tan\alpha}{g}\right) = \frac{\cos\alpha - \mu_S\sin\alpha}{\sin\alpha + \mu_s\cos\alpha}$$

וקיבלנו

$$\omega_1^2 = \left(\frac{g}{h\tan\alpha}\right)\frac{\cos\alpha - \mu_S\sin\alpha}{\sin\alpha + \mu_s\cos\alpha}$$

במקרה שבו כוח החיכוך מכוון לכיוון ההפוך $f_s \rightarrow -f_s$ כלומר שהחיכוך הסטטי המקסימלי יתקבל בדיוק בכיוון ההפוך $\mu_S \rightarrow -\mu_s$

ונקבל

$$\omega_2^2 = \left(\frac{g}{h\tan\alpha}\right)\frac{\cos\alpha + \mu_S\sin\alpha}{\sin\alpha - \mu_s\cos\alpha}$$

נשאלת השאלה מהי המהירות הזוויתית המינימלית מבין השתיים? מכיוון $0° < \alpha < 90°$ קוסינוס וסינוס תמיד חיוביים בתחום הזה, ומקדם החיכוך הסטטי גם הוא חיובי כלומר שהמכנה הראשון הגודל מהמכנה השני והמונה הראשון קטן מהמונה השני, כלומר התדירות הזווית הראשונה קטנה מהשנייה ולכן זוהי התדירות הזוויתית המינימלית.

$$\omega_{min} = \sqrt{\left(\frac{g}{h\tan\alpha}\right)\frac{\cos\alpha - \mu_S\sin\alpha}{\sin\alpha + \mu_s\cos\alpha}}$$

והתדירות המקסימלית

$$\omega_{max} = \sqrt{\left(\frac{g}{h\tan\alpha}\right)\frac{\cos\alpha + \mu_S\sin\alpha}{\sin\alpha - \mu_s\cos\alpha}}$$

שאלה למחשבה:

ניתן לשים שהביטויים עלולים להתפוצץ (מכנה מתאפס), ואף גרוע מכך ניתן לקבל מהירות זוויתית מרוכבת, האם זו טעות?

- באופן כללי כאשר אנו מקבלים פתרון כבור גדול שהיינו חושבים שיהיה ממשי והוא עלול להיות מרוכב זה אמור לגרום לנו לחשוד בטעות.
- במקרה זה לא מדובר בטעות בפתרון אלא במשהו אחר. במקרה זה ייתכן שאין מהירות מינימלית שכן ייתכן שאפילו במהירות אפס אין החלקה, מתי זה קורה?

שאלה 3 <1_3500>

הטייס טס במהירות קבועה ולכן סכום הכוחות על הטייס צריך לספק את התאוצה הרדיאלית בלבד, ללא התאוצה המשקית. הכוחות שפועלים על הטייס הוא כוח הכבידה והכוח הנורמלי שמפעיל מושב הטייס.

בתנועה מעגלית הטייס מרגיש כוח צנטריפוגלי (כוח מדומה החוצה) ולכן המושב מפעיל עליו כוח נורמל .

בנקודה A כוח הכבידה והכוח הנורמלי פועלים לאורך רדיוס המעגל, בכיוונים מנוגדים.

$$\mathrm{N_A} - mg = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow N_A = m(g + \frac{v^2}{R})$$

בנקודה B כוח הכבידה והכוח הנורמלי מאונכים זה לזה. מאחר ורכיב הכוח המשיקי הכולל חייב להתאפס, אנו מסיקים שהוכח הנורמלי פועל הן בכיוון משיקי (כדי לאזן את כוח הכבידה) והן בכיוון רדיאלי (כדי לקיים תנועה מעגלית)

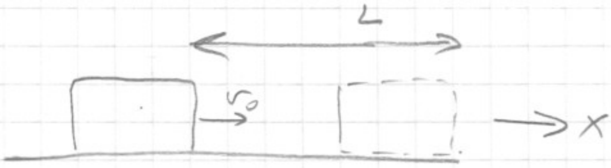
$$\mathrm{N}_{\mathrm{B},t} = mg\ , \qquad N_{B,r} = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow N = m\sqrt{g^2 - \frac{v^4}{R^2}}$$

בנקודה C כוח הכבידה והכוח הנורמלי פועלים שוב לאורך רדיוס המעגל, אך הפעם באותו הכיוון

$$\mathrm{N_C} + mg = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow N_C = m(\frac{v^2}{R} - g)$$

e_10_1_056

ב"ה



<u>נתונים:</u>

$x(t=0)=0$

$v(t=0)=v_0$

מרחק עד לעצירה (בגלל חיכוך עם השולחן): L.

א. כמה זמן עובר עד שהגוף נעצר?

הכוח היחיד שפועל בכיוון התנועה הוא החיכוך וזהו כוח קבוע, $F_k = \mu_k N$, ולכן ניתן להשתמש במשוואות התאוצה הקבועה:

$$v^2 = v_0^2 + 2a_x(x-x_0)$$

בזמן העצירה $\Rightarrow$ $0^2 = v_0^2 + 2a_x \cdot L$

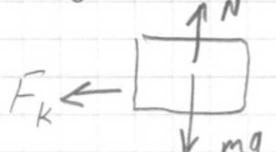
תאוצה בכיוון x: $a_x = -\frac{v_0^2}{2L}$

כעת, ניתן למצוא את הזמן לפי:

$$v(t=t_{stop}) = v_0 + a_x t_{stop} = 0$$

$$t_{stop} = \frac{v_0}{-a_x} = \frac{2L}{v_0}$$

ב. יש להראות שמקדם החיכוך מקיים: $\mu_k = \frac{v_0^2}{2gL}$



$y: \quad N - mg = 0$

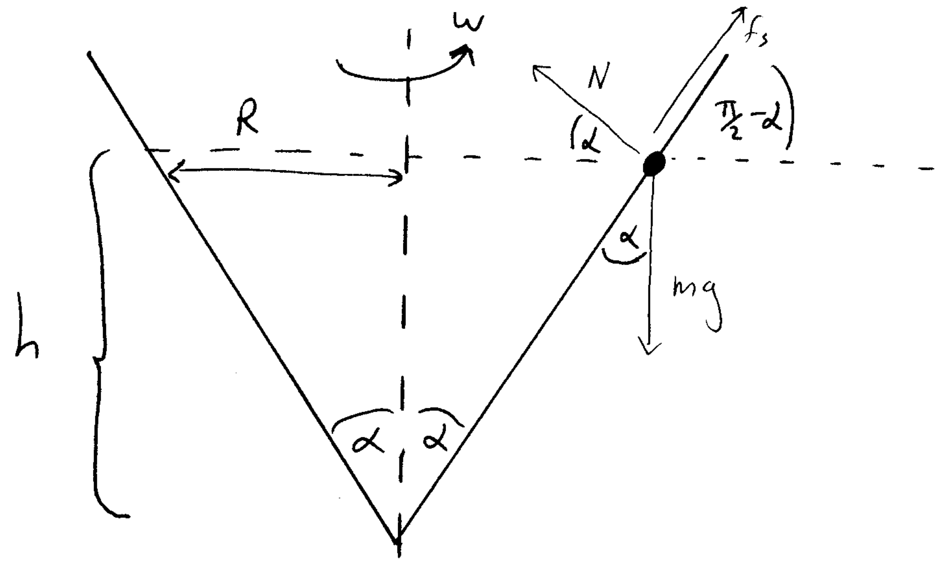
$x: \quad -F_k = -\mu_k N = m a_x$

נציב את N ואת a_x מהסעיף הקודם:

$$-\mu_k \cdot \cancel{m} g = \cancel{m} \cdot \left(-\frac{v_0^2}{2L}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\mu_k = \frac{v_0^2}{2Lg}$$



לפי ציר y:

$$N\sin(\alpha) + f_s\cos(\alpha) - mg = 0$$

לפי ציר x:

$$N\cos(\alpha) - f_s\sin(\alpha) = m a_r$$

כאשר

$$a_r = \frac{V^2}{R} = \omega^2 \cdot R$$

מה זה R?:

$$R = h\tan(\alpha)$$

$$\Rightarrow \quad a_r = \omega^2 \cdot h \cdot \tan(\alpha)$$

$$\boxed{N\cos(\alpha) - f_s\sin(\alpha) = m\omega^2 h\tan(\alpha)} \quad \Leftarrow$$

כח על ציר y:

מכיוון ש $f_{s_{max}} = \mu_s \cdot N$

אם החיכוך באמת בכיוון שרשום הפתרון כמו שרשמתי עד כה.

אם החיכוך בכיוון הפוך אפשר לומר כי $f_s \to -f_s$

[כלומר הופכים את כיוון החץ].

אם כן: עבור f_s כמו שרשום:

$$\begin{cases} N\sin(\alpha) + f_s\cos(\alpha) - mg = 0 \\ N\cos(\alpha) - f_s\sin(\alpha) = m\omega^2 h\tan(\alpha) \end{cases}$$

עבור f_s בכיוון ההפוך:

$$\begin{cases} N\sin(\alpha) - f_s\cos(\alpha) - mg = 0 \\ N\cos(\alpha) + f_s\sin(\alpha) = m\omega^2 h\tan(\alpha) \end{cases}$$

ואז עבור $f_s^{(+)}$:

$$① \quad N\sin(\alpha) + \mu_s N\cos(\alpha) = mg$$

$$N = \frac{mg}{\sin(\alpha) + \mu_s\cos(\alpha)}$$

$$② \quad N\left[\cos(\alpha) - \mu_s\sin(\alpha)\right] = m\omega^2 h\tan(\alpha)$$

$$\Rightarrow \quad mg\left[\frac{\cos(\alpha) - \mu_s\sin(\alpha)}{\sin(\alpha) + \mu_s\cos(\alpha)}\right] = m\omega^2 h\tan(\alpha)$$

$$\frac{g}{h}\cdot\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}\left[\frac{\cos(\alpha) - \mu_s\sin(\alpha)}{\sin(\alpha) + \mu_s\cos(\alpha)}\right] = \omega^2 \qquad (*)$$

עבור $f_s \mapsto -f_s$ זה אותו דבר כמו $\mu_s \mapsto -\mu_s$

ואז מקבלים:

$$(**) \qquad \omega^2 = \frac{g}{h}\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}\left[\frac{\cos(\alpha) + \mu_s\sin(\alpha)}{\sin(\alpha) - \mu_s\cos(\alpha)}\right]$$

קל לראות כי ω^2 במקרה של (*) קטן מ ω^2 במקרה של (**).

השאלה היא באיזה כוח לוחץ הטייס על המושב, או במילים אחרות באיזה כוח לוחץ המושב על הטייס. (כוח הנורמל) אנחנו יודעים כי סכום הכוחות על הטייס צריך לספק את התאוצה הרדיאלית בלבד, וללא תאוצה משיקית.

- בנקודה A, יש כוחות רק בציר הרדיאלי, ומשוואת הכוחות המתקבלת:
$$N-mg=m\frac{V^2}{R}\Rightarrow N=m\left(\frac{V^2}{R}+g\right)$$
- בנקודה B, כוח הכובד הוא רק בכיוון המשיקי, ולכוח הנורמל שני רכיבים, משיקי ורדיאלי. בכיוון הרדיאלי:
$$N_r=m\frac{V^2}{R}$$
ובכיוון המשיקי:
$$N_t-mg=0\Rightarrow N_t=mg$$
ומכאן ש **גודל** הכוח הנורמלי הוא:
$$\left|\vec{N}\right|=\sqrt{N_t^2+N_r^2}=m\sqrt{g^2+\frac{V^4}{R^2}}$$
- בנקודה C, כמו בנקודה A, יש כוחות רק בציר הרדיאלי:
$$N+mg=m\frac{V^2}{R}\Rightarrow N=m\left(\frac{V^2}{R}-g\right)$$

מבחינה איכותית, בתוצאה שהתקבלה הכוח הגדול ביותר הוא בנקודה A, והקטן ביותר בנקודה C.