

תרגול 5 – חוקי ניוטון

כוח – וקטור, מסומן ב- \vec{F} , יחידת N ניוטון

כוח שקול הוא הסכום הווקטורי של כל הכוחות הפועלים על הגוף. מסמנים את הכוח השקול \vec{F}_{net} או $\sum \vec{F}$.
 החוק הראשון של ניוטון: אם $\sum \vec{F} = 0$ (הכוח השקול על הגוף שווה ל-0), מהירות הגוף לא תשתנה.
החוק השני של ניוטון:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

הכוח השקול על גוף שווה למכפלת מסת הגוף (סקלאר) בתאוצה שלו (ווקטור).

$$[N] = [kg] \left[\frac{m}{s^2} \right] = \left[kg \frac{m}{s^2} \right]$$

כמו שראינו בעבר, אפשר לפרק את ווקטור הכוח לרכיבים לפי הצירים שנקבע.

החוק השלישי של ניוטון: כאשר יש אינטראקציה בין שני גופים, הם מפעילים כוחות מנוגדים אחד על השני אשר שווים בגודלם והפוכים בכיוונים

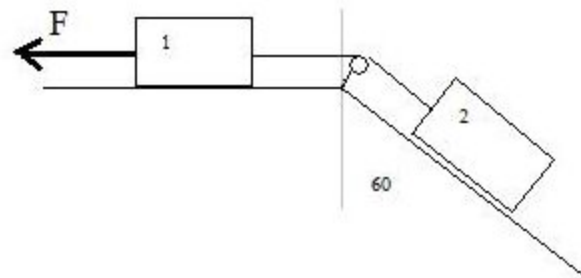
$$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}$$

סדר פעולות עבודה עם כוחות:

1. לשרטט את הבעיה
2. לבחור מערכת צירים – אם יש תאוצה בכיוון מסוים, בד"כ יהיה נוח לבחור אחד הצירים בכיוונה.
3. אם ישנם כמה גופים, לפרק את הבעיה לכל גוף.
4. תרשים כוחות – לשרטט לכל גוף בנפרד חצים עם כיווני הכוחות. הכוחות שנשרטט הם תמיד הכוחות שפועלים על הגוף, ולא אלו שהוא מפעיל.
5. לכתוב משוואת כוחות לכל ציר.
6. נבדוק האם צריך עוד אילוץ על מנת לפתור את מערכת המשוואות (כמה נעלמים וכמה משוואות יש?)
7. נפתור המשוואות.

הכוחות בהם נעסוק היום:

- כוח המשיכה – הכוח אותו מפעיל כדור הארץ כשהוא מושך מסות לכיוון מרכז הכדור. לעיתים מסומן באות W . גודל הכוח פרופורציוני למסת הגוף: $F = W = mg$.
- נורמל – הכוח שגוף אחד מפעיל על השני כשהיא לוחצים אחד על השני. כיוונו תמיד ניצב למשטח המגע בין הגופים. מסומן באות N .
- מתיחות – הכוח אשר חוט מפעיל על גוף אשר מותח אותו. פועל בכיוון מנוגד לכיוון משיכת החוט. כל עוד לא נדבר על גוף קשיח (לקראת סוף הקורס), נניח שהמתיחות בחוט היא יחידה. נסמן המתיחות באות T .



$$\varphi = 60^\circ, m_2 = 30\text{kg}, m_1 = 15\text{kg}$$

טיפ: אפשר לבחור מערכת צירים נפרדת עבור כל גוף. בשאלה הזו מבקשים את גודל הכוח בלבד כי כיוונו ידוע. אם מבקשים תשובה סופית שהיא ווקטור, חשוב להדגיש באיזו מערכת צירים מדובר.
א. נבחר מערכת צירים עבור כל גוף כך שציר אחד מקביל למשטח ואחד מאונך לו.

על המסה m_1 משוואות הכוחות הן:

$$\text{ציר x: } F - T = m_1 a_{x1} = 0$$

$$\text{ציר y: } N_1 - m_1 g = m_1 a_{y1} = 0$$

על המסה m_2

$$\text{ציר x: } T - m_2 g \cos \varphi = m_2 a_{x2} = 0$$

$$\text{ציר y: } N_2 - m_2 g \sin \varphi = m_2 a_{y2} = 0$$

צירי y של הגופים לא תורמים מידע לבעיה, אנחנו מחפשים את הכוח F , לכן נשתמש במשוואות בציר x ונקבל:

$$F = m_2 g \cos \varphi \approx 150\text{N}$$

ב. נשתמש במשוואות הכוחות מהסעיף הקודם, רק שעכשיו יש תאוצה בכיווני x של הגופים

$$\text{גוף 1: } F - T = m_1 a_{x1}$$

$$\text{גוף 2: } T - m_2 g \cos \varphi = m_2 a_{x2}$$

אנחנו צריכים עוד משוואה כדי לפתור. נוסיף אילוך שהגופים מחוברים עם חוט שאינו נמתח, כך שהמרחק שגוף 1 יעבור מראשית הצירים הוא אותו מרחק שגוף 2 יעבור מראשית הצירים, כלומר

$$x_1 = x_2$$

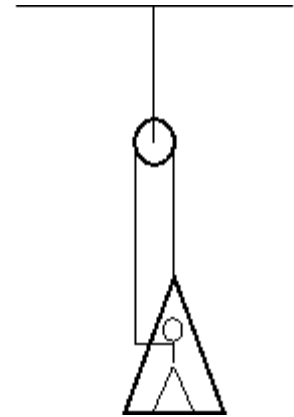
$$\text{לכן גם התאוצה (אם נגזור פעמיים) היא זהה } a_{x1} = a_{x2} = a_x$$

וכך אפשר לפתור את המערכת:

$$T = F - m_1 a_{x1}$$

$$T = m_2 g \cos \varphi + m_2 a_{2x}$$

$$F = (m_1 + m_2) a_x + m_2 g \cos \varphi \approx 60\text{N}$$



נתון: מסת האיש $m_1 = 72 \text{ kg}$ ומסת הלוח $m_2 = 40 \text{ kg}$

יש לנו פה רק ציר יחיד בו פועלים כוחות. נבחר את הכיוון מעלה ככיוון החיובי.

חשוב לשים לב שהאיש אינו מפעיל כוח על עצמו אלא על הלוח עליו הוא עומד דרך הגלגלת.

א. הכוחות על האיש – נורמל ומתיחות כלפי מעלה וכוח הכובד כלפי מטה:

$$T + N - m_1 g = m_1 a_1 = 0$$

אנחנו צריכים משוואה נוספת. נשתמש במשוואת הכוחות על הלוח, כאשר במקרה הזה המתיחות היא כלפי מעלה, אבל הכוח הנורמל שהאיש מפעיל על הלוח הוא כלפי מטה, לכן

$$T - N - m_2 g = m_2 a_2 = 0$$

יש לנו שתי משוואות בשני נעלמים, ונוכל לקבל את המתיחות ע"י בידוד הכוח הנורמל

$$N = m_1 g - T = T - m_2 g \rightarrow T = \frac{g}{2}(m_1 + m_2)$$

המתיחות במערכת האדם היא כלפי מעלה, לכן הכוח שהוא צריך להפעיל יהיה כלפי מטה וגודל הפוך למתיחות:

$$\vec{F} \approx 560 \text{ N } (-\hat{y})$$

ב. הכוח שהאיש מפעיל על הלוח הוא הנורמל מתוך משוואת הכוחות, לכן

$$N = m_1 g - T \approx 160 \text{ N}$$

$$\vec{N} \approx 160 \text{ N } (-\hat{y})$$

ג. כעת נרצה כעת לרדת בתאוצה קבועה, לכן נחזור למשוואות הכוחות עם תאוצה שאינה 0

$$T + N - m_1 g = m_1 a_1$$

$$T - N - m_2 g = m_2 a_2$$

נחבר את שתי המשוואות

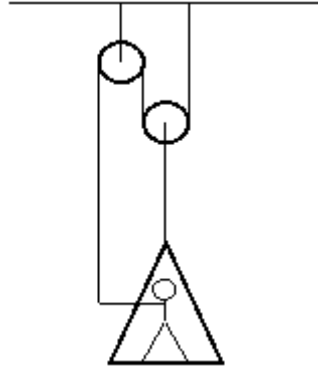
$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)g + \frac{1}{2}(m_1 a_1 + m_2 a_2)$$

אילוץ: מיקום הלוח הוא מיקום האיש, לכן $a_1 = a_2 = -a$, כאשר סימן המינוס הוא לציין תאוצה כלפי מטה.

נקבל:

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)(g - a) \approx 504 \text{ N}$$

לכן הכוח שהאדם צריך הוא $\vec{F} = 504(-\hat{y})\text{N}$, כוח קטן יותר, כמו שהיינו מצפים.



ד.

נצטרך להוסיף עוד משוואת כוחות הגלגלת הנוספת (חסרת מסה).

נסמן ב- T_2 את המתיחות של החוט המחבר בין הגלגלת החדשה למשטח, כך שמשוואת הכוחות על הגלגלת:

$$2T - T_2 = 0 \cdot a_{pulley} = 0 \rightarrow T_2 = 2T$$

ונכתוב מחדש את משוואת הכוחות על הלוח:

$$T_2 - N - m_2g = m_2a$$

משוואת הכוחות על האיש לא השתנתה:

$$T + N - m_1g = m_1a$$

נחבר את המשוואות האחרונות כדי לקבל

$$T_2 + T = (m_1 + m_2)(g + a)$$

ונציב את המשוואה הראשונה כדי לקבל

$$T = \frac{1}{3}(m_1 + m_2)(g + a)$$

קיבלנו משוואה כללית עבור המתיחות. נוכל להציב $a = 0, -1 \text{ m/s}^2$ עבור סעיפים א' וג' ולזכור שהכוח שהאדם מפעיל הוא מנוגד למתיחות ומכוון כלפי מטה.

ניתן לראות שגודל הכוח שהאדם צריך להפעיל הוא בעל פקטור $\frac{2}{3}$ ביחס לכוח ללא הגלגלת הנוספת.

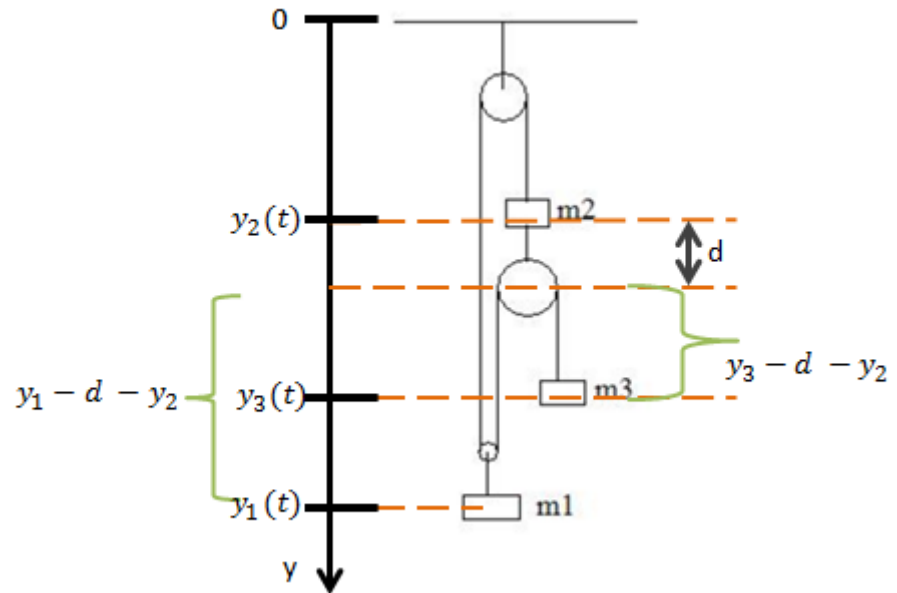
כדי לקבל את הנורמל נכפול את משוואת הכוחות על האיש ב-2,

$$2T + 2N - 2m_1g = 2m_1a$$

ונחסר בין משוואת הכוחות של האיש והלוח כדי לקבל:

$$3N = (2m_1 - m_2)(g + a)$$

$$N = \left(\frac{2}{3}m_1 - \frac{1}{3}m_2\right)(g + a)$$



התנועה כולה מתבצעת בציר y נבחר את הכיוון החיובי של הציר כלפי מטה
המשוואה עבור המסה m_1

$$-T_1 + m_1 g = m_1 a_1$$

המשוואה עבור המסה m_2

$$-T_2 + m_2 g + T_3 = m_2 a_2$$

המשוואה עבור המסה m_3

$$-T_2 + m_3 g = m_3 a_3$$

כעת נמצא את האילוצים במערכת זו יש לנו 3 אילוצים 2 עבור המתיחויות של הגלגלות ו-1 עבור התאוצות

עבור הגלגלת השמאלית מקבלים

$$T_1 - 2T_2 = 0 \Rightarrow T_1 = 2T_2$$

עבור הגלגלת הימנית מקבלים

$$T_3 - 2T_2 = 0 \Rightarrow T_3 = 2T_2$$

בשביל למצוא את הקשר בין התאוצות נצטרך למצוא את האילוץ על החבל הארוך. האילוץ הוא שאורכו נשאר קבוע ולכן אם נקבע קואורדינטה 0 בתקרה נקבל את המשוואה הבאה עבור אורך החוט L

$$y_1 + y_1 - d - y_2 + y_3 - d - y_2 + y_2 = L$$

$$2y_1 - y_2 + y_3 - 2d = L$$

כעת נגזור פעמיים בשביל לקבל את הקשר בין בתאוצות

$$2a_1 = a_2 - a_3$$

נחבר את המשוואות והאילוצים ונקבל (נפטר מתאוצת הגוף השני ונציב את המתיחויות בהצגה של מתיחות 2)

המשוואה עבור המסה m_1

$$-2T_2 + m_1g = m_1a_1$$

המשוואה עבור המסה m_2

$$-T_2 + m_2g + 2T_2 = m_2(2a_1 + a_3)$$

המשוואה עבור המסה m_3

$$-T_2 + m_3g = m_3a_3$$

נחבר את שתי המשוואות האחרונות ונקבל

$$m_2g + m_1g = m_3a_3 + m_2(2a_1 + a_3) \Rightarrow a_1 = \frac{(m_2 + m_1)g - (m_3 + m_2)a_3}{2m_2}$$

כעת נכפיל את המשוואה השלישית ב-2 ונחסר אותה מהמשוואה הראשונה

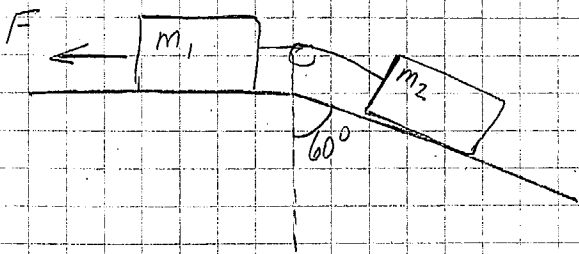
$$m_3g - m_1g = m_3a_3 - m_1a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{(m_3 - m_1)g - m_3a_3}{-m_1}$$

נציב ונבודד את התאוצה ונקבל

$$\frac{(m_2 + m_1)g - (m_3 + m_2)a_3}{2m_2} = \frac{(m_3 - m_1)g - m_3a_3}{-m_1}$$

$$a_3 = \frac{[-m_1(m_2 + m_1) + 2m_2(m_1 - m_3)]}{-[m_1(m_3 + m_2) + 2m_2m_3]}g = \frac{[m_1^2 + 2m_2m_3 + m_1m_2]}{[m_1m_2 + m_1m_3 + 2m_2m_3]}g$$

ומכאן נוכל למצוא את יתר התאוצות

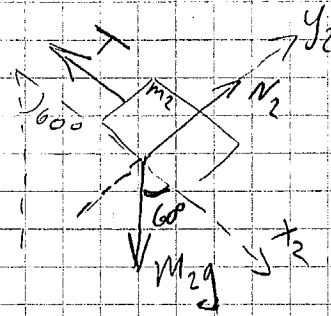
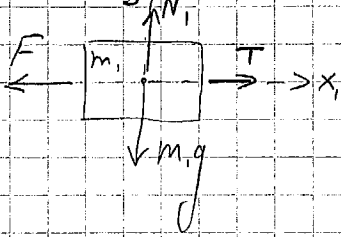


נתונים:

$m_1 = 15 \text{ kg}$

$m_2 = 30 \text{ kg}$

קבעו כוחות-כובות של כל קצת של צ'רטים (כבדים):



(1) $\sum F_{x_1} = T - F = m_1 a$

(3) $\sum F_{x_2} = m_2 g \cos(60^\circ) - T = m_2 a$

(2) $\sum F_{y_1} = N_1 - m_1 g = 0$

(4) $N_2 - m_2 g \sin(60^\circ) = 0$

* הערה: כוח הכובד של כל חלקי המערכת זהה, והתחומים הינם כזה כשניהם, והקואורדינטה של חלקים כזה עם כו'.

לכן נוסח (1)+(3) נקבל:

$$m_2 g \cos(60^\circ) - F = (m_1 + m_2) a$$

אם $a=0$ (תנועה מתחילה קבועה):

$$m_2 g \cos(60^\circ) - F = 0$$

$$F = m_2 g \cos(60^\circ) = 30 \cdot 9.8 \cdot 0.5 \approx 147 \text{ N}$$

אם $a = 2 \text{ m/s}^2$ (23) כ.

$$F = m_2 g \cos(60^\circ) - (m_1 + m_2) \cdot a = 147 - 90 = 57 \text{ N}$$

ניקוי חלונות

ישנם שני גופים רלוונטים, הלוח ור'. כל התנועה בציר אחד, ולכן אין צורך בכתיב וקטורי. נסמן קוארדינטה y כלפי מעלה.
על האיש פועלים:

$$N_1 + T - m_1g = m_1a_1$$

על הלוח פועלים:

$$T - N_1 - m_2g = m_2a_2$$

התאוצה של שניהם חייבת להיות זהה כדי שהאיש לא יעוף מהלוח. נחבר כדי להפטר מהנורמל:

$$2T - (m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2)a$$

שאלו מה צריך להיות הכוח שפועל על החבל כשהמהירות קבועה (תאוצה אפס), כלומר מה המתיחות:

$$T = \frac{m_1 + m_2}{2}g = 560N$$

הכוח שפועל על הלוח זה הנורמל, ואותו נקבל מחיסור של המשוואות:

$$2N_1 - m_1g + m_2g = 0$$

$$N_1 = \frac{(m_1 - m_2)g}{2} = 160N$$

שימו לב שאם אתם קלים יותר מהמשטח שעליו אתם עומדים, כדאי לכם או להפעיל כוח בכיוון אחר (לא רק מטה), או להאיץ ולא להשאר במהירות קבועה. כי הנורמל לא יכול להיות שלילי.
הכוח על החבל בשביל תאוצה שלילית קבועה הוא:

$$T = \frac{m_1 + m_2}{2}(g + a) = 504N$$

שזה פחות כוח, גם כן תוצאה מתבקשת.

בחלק השני של השאלה, צריך להוסיף משוואת חוק שני עבור הגלגלת השנייה. נקרא לחוט החדש T_2 .
המשוואה על הגלגלת החדשה:

$$2T - T_2 = 0 \cdot a_{pulley} = 0$$

המשוואה על הקרש גם משתנה, מכיוון שהחוט המחובר אליה שונה:

$$T_2 - N_1 - m_2g = m_2a$$

המשוואה על ר' לא השתנתה:

$$N_1 + T - m_1g = m_1a$$

נציב את המשוואה על הגלגלת במשוואה על הקרש:

$$2T - N_1 - m_2g = m_2a$$

לקבלת הכוח על החוט נפטר מהנורמל על ידי חיבור:

$$3T = (m_1 + m_2)(g + a)$$

$$T = \frac{m_1 + m_2}{3}(g + a) = \frac{2}{3} \frac{m_1 + m_2}{2}(g + a)$$

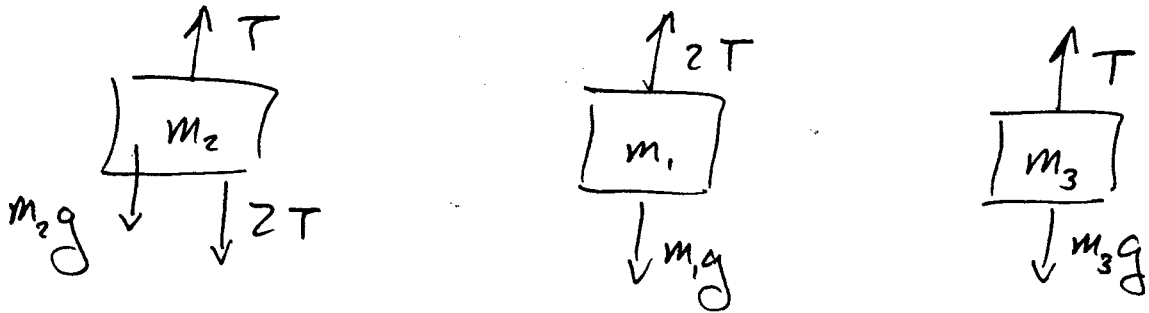
כלומר הפתרונות לסעיפי המתיחות בחוט (תאוצה 0 ותאוצה -1) הם שני שליש מהפתרונות הקודמים. זה אומר שיותר קל להשאר בתאוצה קבועה במערכת החדשה שר' בנה.
בשביל לקבל משוואה על הנורמל, עלינו לכפול את המשוואה הראשונה ב2, ולחסר, כדי להפטר מהמתיחות.

$$3N_1 = 2m_1(g + a) - m_2(a + g)$$

$$N_1 = \left(\frac{2}{3}m_1 - \frac{1}{3}m_2\right)(a + g)$$

d-2-10-e

נבדוק את ציורים אלה - מציאת שכיחה
 המובי הוא שלפי המש. הכוחות על הקוסיס
 מתונים בקינמטות הבאות:



משוואת התנועה הן:

$$m_2 a_2 = m_2 g + T$$

$$m_1 a_1 = -2T + m_1 g$$

$$m_3 a_3 = -T + m_3 g$$

נחבר את גיליוצי התנועה.

נניח ש m_1 עולה בפעור x_1 ולכן משתחרר

מחר באורך $2x_1$ ונחמו חלק יחסי α עובר

ימיה וחלק α עובר שמאלה.

לכן המסה m_2 יורדת בפעור x_2 ו- $(1-\alpha)2x_1$

יזכה של m_2 בפעור x_2 משתחרר $2x_2$ חבל

ולכן m_1 תרד בפעור $2x_2$ בתוצאה נריקה z

ועוד $2\alpha x_1$ משתחרר החבל של m_1 .

$$x_2 = (1-\alpha)2x_1$$

$$x_3 = 2x_2 + 2\alpha x_1$$

$$a_1 = -\ddot{x}_1 \quad a_2 = \ddot{x}_2 \quad a_3 = \ddot{x}_3$$

$$a_2 = 2(1-\alpha)a_1$$

$$a_3 = 4(1-\alpha)a_1 + 2\alpha a_1$$

$$\Rightarrow 2a_1 + a_3 = a_2$$

הפתרון של המערכת ו של הנתונים ו

$$a_1 = g \frac{m_1(m_2 + m_3)}{m_1(m_2 + m_3) + 4m_2m_3}$$

$$a_2 = g \left(1 - \frac{2m_1m_3}{m_1(m_2 + m_3) + 4m_2m_3} \right)$$

$$a_3 = g \left(1 - \frac{2m_1m_2}{m_1(m_2 + m_3) + 4m_2m_3} \right)$$