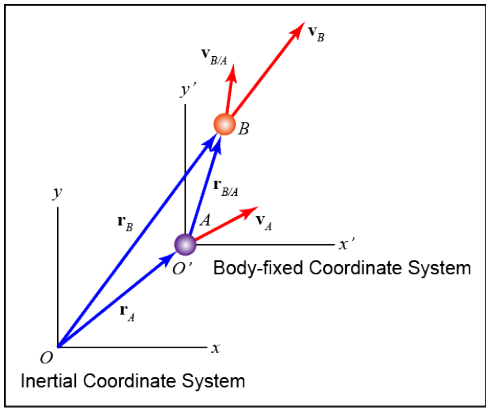
תרגול 6 – תנועה יחסית ותנועה מעגלית

תנועה יחסית ומהירות יחסית (גליליי):



במקרה בו שתי מערכות מתארות גוף, כאשר מערכת S נמצאת במנוחה ו-S' נעה במהירות $\vec{v}_A$ (במקרה מערכת שנעה עם אדם שרץ במהירות קבועה). מיקום הכדור B במערכת S הוא $\vec{r}_B$ ומיקום האדם ההולך $\vec{r}_A = \vec{v}_A t$

מיקום הכדור B כמו שהרץ רואה אותו הוא $\vec{r}_{B/A} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \vec{r}_B - \vec{v}_A t$

אם נרצה לחשב את המהירות היחסית בין הגופים, נגזור לפי הזמן:

$$\vec{v}_{B/A} = \frac{d\vec{r}_{B/A}}{dt} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$$

כלומר שהקשר בין המהירות בין מהירות הכדור שנראית במערכת המנוחה $\vec{v}_B$ לבין מהירות הכדור הנראית במערכת הנעה $\vec{v}_{B/A}$ הוא חיבור של האחרון ל-$\vec{v}_A$, המהירות היחסית בין המערכות.

אם נרצה למצוא את הקשר בין התאוצות, נגזור שוב לפי הזמן. (נזכור ש-$\vec{v}_A$ קבוע בזמן ונקבל).

$$\vec{a}_{B/A} = \vec{a}_B$$

חשוב לשים לב שהנוסחאות נכונות עבור מערכות אינרציאליות, כלומר מערכות הנעות במהירות קבועה.

תנועה מעגלית:

תנועה במסלול בעל רדיוס (מרחק) קבוע מנקודה כלשהיא.

עבור תנועה ברדיוס R, ניתן לכתוב את מיקום הגוף במרחק R ובזווית θ מציר $\hat{x}$.

מיקום הגוף:

$$\vec{r} = (r_x, r_y) = (R\cos\theta\,, R\sin\theta) = R(\cos\theta\,, \sin\theta) = R\hat{r}$$

אם גוף נע במעגל, הזווית θ משתנה עם הזמן, והנגזרת שלה מוגדרת להיות $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$, זוהי המהירות הזוויתית.

אם נרצה לחשב את המהירות שהגוף נע בו:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = R\frac{d}{dt}(\cos\theta, \sin\theta) = R\left(-\dot{\theta}\sin\theta, \dot{\theta}\cos\theta\right) = R\dot{\theta}(-\sin\theta, \cos\theta) = R\dot{\theta}\hat{\theta}$$

גודל המהירות הוא $v = R\dot{\theta}$

והתאוצה:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = R\frac{d}{dt}\dot{\theta}(-\sin\theta, \cos\theta) + R\dot{\theta}\frac{d}{dt}(-\sin\theta, \cos\theta) = R\ddot{\theta}(-\sin\theta, \cos\theta) - R\dot{\theta}^2(\cos\theta, \sin\theta)$$
$$= R\ddot{\theta}\hat{\theta} - R\dot{\theta}^2\hat{r}$$

<u>תאוצה רדיאלית</u>: מאונכת למהירות.

$$a_{rad} = R\dot{\theta}^2 = \frac{v^2}{R}$$

<u>תאוצה משיקית</u>: מקבילה למהירות

$$a_{tan} = R\ddot{\theta} = \frac{dv}{dt}$$

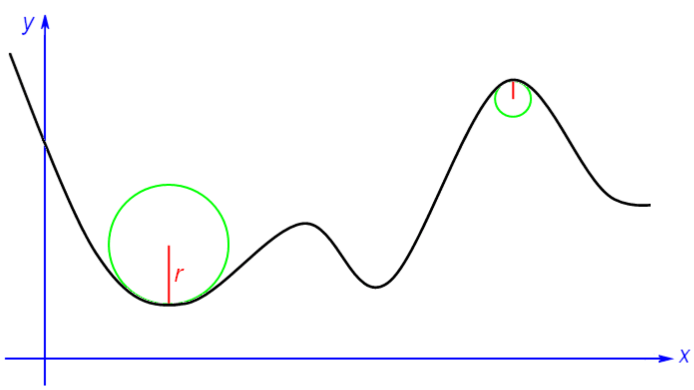
<u>מהירות זוויתית</u> : $\omega = \frac{d\theta}{dt}$

<u>מהירות</u>: $v = \omega R$

<u>תאוצה זוויתית</u>: $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

<u>רדיוס העקמומיות</u> הוא רדיוס המעגל התואם את המסלול בנקודה מסוימת. כלומר בנקודה מסוימת ניתן להתייחס לתנועה כתנועה מעגלית.



שאלה 1 <1 2402>

נתון: $\varphi = 38°$,$v = 0.75\frac{m}{s}$

נגדיר ציר y כלפי מעלה וציר x ימינה. $\vec{v}_A$ היא מהירות הבת ו$\vec{v}_B$ היא מהירות המוכר.

נבטא כל מהירות לפי רכיביה בצירים השונים:

$$\vec{v}_B = (v\cos\varphi\,, v\sin\varphi)$$

$$\vec{v}_A = (v\cos\varphi\,, -v\sin\varphi)$$

המהירות היחסית של המוכר (B) ביחס לבתו (A):

$$\vec{v}_{BA} = \vec{v}_B - \vec{v}_A = (0{,}2v\sin\varphi) = 2\cdot 0.75\cdot \sin 38°\frac{m}{s} = 0.92\frac{m}{s}$$

המשמעות, מבחינת הבת האב עולה כלפי מעלה.

שאלה 2 <1 2500>

נתון חלקיק שנע במעגל בעל רדיוס R בתאוצה משיקית $a_t = const$ וללא מהירות התחלתית.

א.

$$a_t = \frac{dv}{dt} \to \int_{v_o}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a_t\, dt$$

$$v - v_0 = a_t(t - t_0) \to v = a_t t$$

$$a_r = \frac{v^2}{R} = \frac{a_t^2}{R} t^2$$

ב. בתנועה מעגלית $v = \omega R$ וכמו כן $v = a_t t$ כך ש:

$$v = a_t t = \omega R = \frac{d\theta}{dt} R$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{a_t}{R} t \to \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_0^t \frac{a_t}{R} t\, dt$$

$$\theta(t) = \frac{a_t t^2}{2R} \to t^2 = \frac{2R\theta}{a_t}$$

מהסעיף הקודם נציב את הקשר האחרון שקיבלנו: $a_r = \frac{a_t^2}{R} \frac{2R\theta}{a_t} = 2a_t\theta$

שאלה 3 <2509 1>

מהירות הרכבת הממוצע : $v_{avg} = 200\frac{m}{s}$ ותאוצה רדיאלית מקסימלית $a_{r,max} = 0.1\ g$

$$a_r = \frac{v^2}{R}$$

א.

$$R = \frac{v^2}{a_r}$$

עבור מהירות נתונה, רדיוס עקמומיות מינימלי יתקבל עבור תאוצה ניצבת מקסימלית:

$$R_{min} = \frac{v_{avg}^2}{a_{r,max}} = \frac{200^2}{0.1 \cdot 10} = 40000\ m = 40\ km$$

ב. $v^2 = a_r R$ כלומר שמהירות מקסימלית תתקבל עבור תאוצה ניצבת מקסימלית. $R = 1km = 1000\ m$

$$v_{max} = \sqrt{a_{r,max}R} = \sqrt{0.1 \cdot 10 \cdot 1000} = \sqrt{1000} = 10\sqrt{10} = 31.62\frac{m}{s}$$

מדרגות נעות

הכלל לקביעת מהירות יחסית הוא: $\vec{v}_{rel} = \vec{v} - \vec{v}_{sys}$
כאשר $\vec{v}_{sys}$ היא מהירות המערכת שביחס אליה מחשבים.
נסמן את נתוני השאלה כך:

- $v = 0.75\frac{m}{s}$ היא גודלה של המהירות.
- $\alpha = 38^{\circ}$ זו זווית המדרגות הנעות ביחס לאופק.

נרשום את שתי המהירויות באותה מערכת קואורדינטות. בחרנו במערכת בה y חיובי כלפי מעלה, וx חיובי ימינה. לכן המהירויות יהיו:

$$\vec{v}_{father} = v\begin{pmatrix}\cos(\alpha)\\ \sin(\alpha)\end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_{daughter} = v\begin{pmatrix}\cos(\alpha)\\ -\sin(\alpha)\end{pmatrix}$$

המהירות של המוכר ביחס לביתו היא אם כן:

$$\vec{v}_{relative} = \vec{v}_{father} - \vec{v}_{daughter} = v\begin{pmatrix}\cos(\alpha)\\ \sin(\alpha)\end{pmatrix} - v\begin{pmatrix}\cos(\alpha)\\ -\sin(\alpha)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 2v\sin(\alpha)\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}0\\ 0.9\frac{m}{s}\end{pmatrix}$$

כלומר, מבחינת הבת האב רק עולה מעלה.

תרגיל כיתה-1

א.) נתון a_t, אז מתוך הגדרת התאוצה

$$\vec{a} = \underbrace{\dot{v}\hat{v}}_{\vec{a}_t} + v\dot{\hat{v}}$$

אז

$$\dot{v} = a_t$$

$$\Downarrow$$

$$v - \cancel{v_0} = a_t \cdot t$$

נתון כי
שווה אפס.

נציב לתוך הביטוי של התאוצה הרדיאלית

$$a_r = \frac{v^2}{R} = \frac{a_t^2}{R} \cdot t^2$$

ב.) בתנועה מעגלית יש קשר בין המהירות הזוויתית ($\dot{\varphi}$) והמהירות הקווית.

$$\vec{V} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\varphi}\hat{\varphi}$$

מכיוון שהתנועה על מעגל היא $\rho = R$ אז $\dot{\rho} = 0$ כלומר

$$V = R\dot{\varphi}$$

נציב את המהירות

$$a_t t = R\frac{d\varphi}{dt}$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi = \frac{1}{2}\frac{a_t}{R}t^2$$

נציב לביטוי שמצאנו בסעיף א' ונקבל

$$a_r = 2a_t \cdot \varphi.$$

רכבת מהירה נעה במהירות של $200\frac{m}{s}$, למען

נוחות הנוסעים נדרש שהתאוצה הניצבת

לרכבת לא תעלה על $0.1g$.

(i) מצאו את רדיוס העקמומיות המקסימלי עבור הרכבת

כשהיא נעה במהירות המוצעת.

(ii) מה המהירות המקסימלית בסיבוב שרדיוסו

$1km$?

(i) רדיוס העקמומיות:

$$R = \frac{|v|^2}{|a_R|} = \frac{\left(200\left(\frac{m}{s}\right)\right)^2}{0.1\cdot 10\left(\frac{m}{s^2}\right)}$$

$$\boxed{R_{max} = 40{,}000(m) = 40\,km}$$

בדיקת יחידות:

$$\left[\frac{m^{\cancel{2}}}{\cancel{s^2}}\cdot\frac{\cancel{s^2}}{\cancel{m}}\right] = (m)$$

(ii)

$$|v|^2 = R\cdot|a_R| = 1{,}000(m)\cdot 0.1\cdot 10\left(\frac{m}{s^2}\right)$$

$$= 1{,}000\left(\frac{m}{s}\right)^2$$

$$\boxed{V_{max} = 31.6\left(\frac{m}{s}\right)}$$