נכתב ע"י עומר גולדברג ויאיר מזל

Physics1B 2017A

תרגול 12 – גוף קשיח - דינמיקה

בשבוע שעבר רשמנו את החוק השני של ניוטון עבור סיבוב:

$$\sum \vec{\tau}_O = I_O \vec{\alpha}_O$$

בשבוע שעבר דנו במקרה בו צד ימין של המשוואה היה שווה ל – 0, ולכן השאלה מהו מומנט ההתמד הייתה לא רלוונטית. כעת אנו רוצים לדון במקרים בהם יש תאוצה זוויתית, ולכן נדון תחילה בביטוי עבור מומנט ההתמד.

מומנט התמד:

לפי ההגדרה הנ"ל מומנט ההתמד הוא הקשר בין סך מומנטי הכוח שמופעלים על גוף לבין התאוצה הזוויתית עבור ציר סיבוב ספציפי. אפשר גם לחשוב על מומנט אינרציה כמקביל למסה עבור סיבוב.

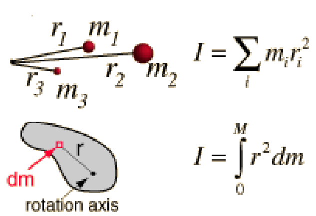
במערכת בדידה:

$$I = \sum_i m_i (\vec{r}_i)^2$$

ובמערכת רציפה

$$I = \int r^2 dm$$

כאשר r, r_i הם המרחקים של כל יחידת מסה מציר הסיבוב.



מומנט ההתמד הוא גודל אדיטיבי. לפיכך במידה ויש לנו גוף המורכב ממספר גופים קטנים יותר, ניתן למצוא את מומנט ההתמד של הגוף המשוקלל על ססימת המומנטים של הגופים השונים:

$$I_{tot} = \sum_i I_i$$

משפט הצירים המקבילים (שטיינר)

$$I = I_{cm} + Mh^2$$

עבור שני צירי סיבוב מקבילים, I מומנט ההתמד סביב ציר סיבוב מסוים, שווה למומנט ההתמד I_{cm} סביב ציר מקביל שעובר דרך מרכז המסה מוזז במסה הכוללת של הגוף M מוכפלת במרחק האנכי בין הצירים h בריבוע.

אנרגיה קינטית סיבובית

אנרגיה קינטית של גופים מסתובבים מוגדרת

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2$$

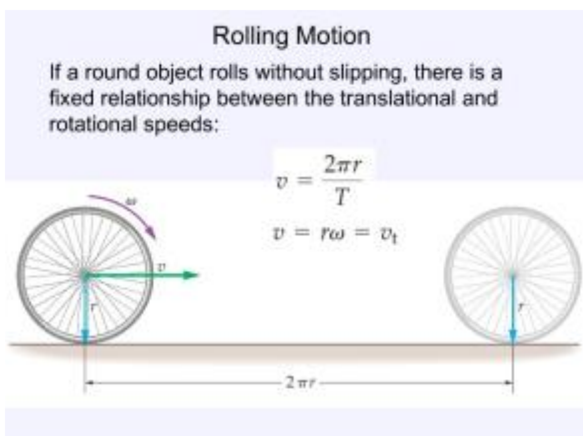
אנרגיה של גוף מתגלגל ללא החלקה, כאשר ציר הסיבוב הוא נקודת מגע עם הקרקע ניתן לכתוב (לפני משפט הצירים המקבילים)

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2}(I_{cm} + MR^2)\omega^2 = \frac{1}{2} I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2} M(R\omega)^2 = \frac{1}{2} I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2} Mv_{cm}^2$$

האנרגיה הקינטית של גוף כוללת את האנרגיה של תנועה קווית של מרכז המסה ואת האנרגיה של סיבוב סביב ציר בנקודת מרכז המסה – זוהי אנרגיית הסיבוב של הגוף. צד ימין של הביטוי האחרון הוא כללי למדי, וניתן להשתמש הוגם במקרים אחרים.

גלגול ללא החלקה

עבור גוף שמבצע גלגול ללא החלקה,



נניח שנרצה למצוא את המרחק שמרכז המסה עבר x_{cm}, במקרה של גלגול ללא החלקה, הוא שווה בדיוק לקשת שנוצרה

$$x_{cm} = \theta R$$

כאשר R הוא רדיוס הגוף

אם גוזרים את הביטוי נקבל:

$$v_{cm} = \omega R$$

v_{cm} הוא המהירות הקווית של מרכז המסה, ω הוא המהירות הזוויתית

$$a_{cm} = R\alpha$$

α היא התאוצה הזוויתית של הגוף

תרגיל 1 <6403_1>

עבור מערכת שמתחילה ממנוחה (הנחה), יש שימור אנרגיה

נגדיר את 0 הפוטנציאל בגובה 0, כך שבמצב ההתחלתי יש רק אנרגיה פוטנציאלית

$$MgH = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2$$

החבל אינו מחליק, לכן אפשר לכתוב:

$$v = \omega_1 R_1 = \omega_2 R_2$$

כך ש

$$MgH = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I_1\frac{v^2}{R_1^2} + \frac{1}{2}I_2\frac{v^2}{R_2^2} = \frac{1}{2}v^2\left(M + \frac{I_1}{R_1^2} + \frac{I_2}{R_2^2}\right)$$

$$v^2 = \frac{2MgH}{M + \frac{I_1}{R_1^2} + \frac{I_2}{R_2^2}}$$

נשאר רק לכתוב את מומנטי האינרציה של הכדור והגליל סביב הציר הראשי

$$I_1 = \frac{2}{5}m_1R_1^2$$

$$I_2 = \frac{1}{2}m_2R_2^2$$

לכן

$$v^2 = \frac{2MgH}{M + \frac{2}{5}m_1 + \frac{1}{2}m_2}$$

שאלה 2 <1_6702>

יש שימור של אנרגיה, בהתחלה קיימת רק אנרגיה פוטנציאלית כי הגופים מתחילים ממנוחה, בסוף יש רק אנרגיה קינטית המורכבת מתנועת מרכז מסה וסיבוב:

$$mgh = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$$

עבור גלגול ללא החלקה

$$v_{cm} = \omega R = v$$

לכן

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\frac{v^2}{R^2}$$

$$v^2\left(m + \frac{I_{cm}}{R^2}\right) = 2mgh$$

$$v^2 = \frac{2mgh}{m + \frac{I_{cm}}{R^2}}$$

עבור גליל מלא:

$$I_{cm} = \frac{1}{2}mR^2$$

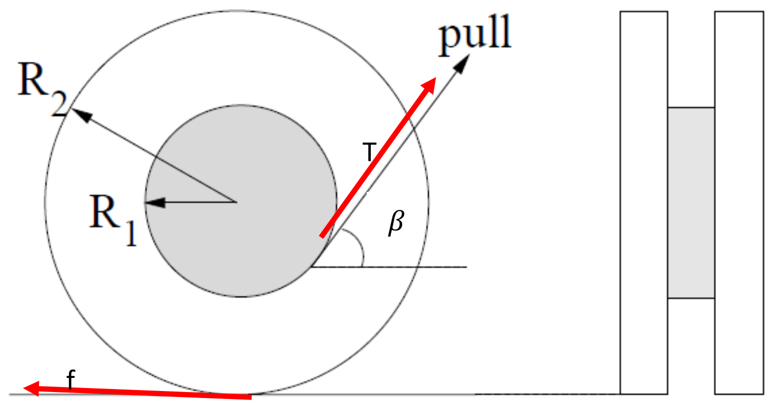
$$v^2 = \frac{2mgh}{m + \frac{\frac{1}{2}mR^2}{R^2}} = \frac{2mgh}{m + \frac{1}{2}m} = \frac{4}{3}gh$$

עבור גלילי חלול:

$$I_{cm} = mR^2$$

$$v^2 = \frac{2mgh}{m + \frac{mR^2}{R^2}} = \frac{2mgh}{2m} = gh$$

שאלה 3 <1_6704>



בתחילת התרגיל המשיכה חלשה מספיק כך שהחיכוך סטטי (גלגול ללא החלקה). נבחר מערכת צירים עם כיוון חיובי ימינה, וסיבוב נגד כיוון השעון בתור סיבוב חיובי. נרשום את החוק השני של ניוטון עבור תנועה קווית, ועבור סיבוב למערכת שלנו:

$$\sum F_x = T\cos\beta - f = ma$$
$$\sum F_y = N - T\sin\beta - mg = 0$$
$$\sum \tau = TR_1 - fR_2 = I\alpha$$

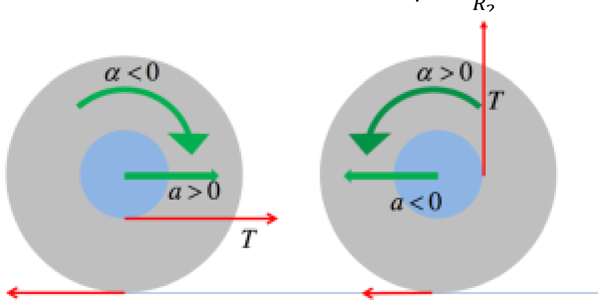
א. התנועה היא ללא החלקה, ולכן (בעקבות הבחירות של מערכת הצירים):

$$a = -\alpha R_2$$

הנעלמים שלנו בבעיה הם התאוצה (הקווית והזוויתית), וכוח החיכוך. מאחר ויש לנו שלוש משוואת ניתן לפתור עבור התאוצה הקווית (שתתקבל כפונקציה של הזווית β):

$$\sum \tau = TR_1 - fR_2 = -\frac{Ia}{R_2}$$
$$\Rightarrow T(R_2\cos\beta - R_1) = a\left(mR_2 + \frac{I}{R_2}\right)$$
$$\Rightarrow a = T\frac{\cos\beta - \frac{R_1}{R_2}}{m + \frac{I}{R_2^2}}$$

לפיכך עבור $\cos\beta > \frac{R_1}{R_2}$ התאוצה יוצאת חיובית משמע ימינה. עבור $\cos\beta < \frac{R_1}{R_2}$ התאוצה שלילית משמע ימינה. במקרי הקצה התוצאה הנ"ל היא די אינטואיטיבית:



ניצן לציין את העובדה שבמקרה הימני מבין שתי התמונות

כיוון התנועה זהה לכיוון החיכוך!

זה גם מה שקורה לדוגמא בסיבוב של גלגל רכב.

ב. כעת מגבירים בהדרגה את המתיחות בחוט (מושכים אותו חזק יותר), ניתן לשאול את עצמנו עד כמה חזק אפשר למשוך מבלי שהחיכוך ייהפך קינטי. ניתן לבודד את כוח החיכוך מהמשוואות הנ"ל:

$$f = T\cos\beta - ma = T\left(\cos\beta - \frac{\cos\beta - \frac{R_1}{R_2}}{1 + \frac{I}{mR_2^2}}\right)$$

$$\Rightarrow f = T\left(\frac{I\cos\beta + mR_1R_2}{mR_2^2 + I}\right) \leq \mu N = \mu(mg - T\sin\beta)$$

מכאן כאשר:

$$T > T_{max} = \mu mg\left(\frac{mR_2^2 + I}{I\cos\beta + mR_1R_2 + \mu\sin\beta\,(mR_2^2 + I)}\right)$$

החיכוך יהיה קינטי.

<u>פתרון:</u>

נקבע את נקודת האפס של האנרגיה הפוטנציאלית בגובה H מתחת לתחילת התנועה של המסה ונרשום את שימור האנרגיה:

$$E_i = MgH$$
$$E_f = \frac{1}{2}I_{\text{sphere}}\omega_{\text{sphere}}^2 + \frac{1}{2}I_{\text{cylinder}}\omega_{\text{cylinder}}^2 + \frac{1}{2}Mv^2$$

נשים לב כי היות והתנועה היא ללא החלקה מתקיים:

$$v = \omega_{\text{sphere}}R_{\text{sphere}} = \omega_{\text{cylinder}}R_{\text{cylinder}}$$

נציב הכל ונפתור עבור המהירות:

$$MgH = \frac{1}{2}I_{\text{sphere}}\omega_{\text{sphere}}^2 + \frac{1}{2}I_{\text{cylinder}}\omega_{\text{cylinder}}^2 + \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{I_{\text{sphere}}}{R_{\text{sphere}}^2} + \frac{I_{\text{cylinder}}}{R_{\text{cylinder}}^2} + M\right)v^2$$

$$v^2 = \frac{2MgH}{\frac{I_{\text{sphere}}}{R_{\text{sphere}}^2} + \frac{I_{\text{cylinder}}}{R_{\text{cylinder}}^2} + M}$$

נציב $I_{\text{cylinder}} = \frac{1}{2}m_2R_{\text{cylinder}}^2$ ו- $I_{\text{sphere}} = \frac{2}{5}m_1R_{\text{sphere}}^2$ ונקבל לבסוף:

$$v^2 = \frac{2MgH}{\frac{2}{5}m_1 + \frac{1}{2}m_2 + M} = \boxed{\frac{20MgH}{4m_1 + 5m_2 + 10M}}$$

מומלץ לבדוק יחידות וגבולות שונים!

ex-12-02

א) מאין שימור אנרגיה :

$$E_i = E_f$$

$$mgh = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} m v^2$$

$$V = \omega R$$

$$mgh = \frac{1}{2} I \left(\frac{V}{R}\right)^2 + \frac{1}{2} m V^2$$

$$2mgh = V^2 \left(\frac{I}{R^2} + m\right)$$

$$V^2 = \frac{2gh}{\left(m + \frac{I}{R^2}\right)}$$

עבור גליל מלא:

$$I = \frac{1}{2} m R^2$$

$$V^2_{\text{גליל מלא}} = \frac{2gh}{\left(m + \frac{\frac{1}{2} m \cancel{R^2}}{\cancel{R^2}}\right)}$$

$$V^2_{\text{גליל מלא}} = \frac{4gh}{3m} \Rightarrow V_{\text{גליל מלא}} = \sqrt{\frac{4gh}{3m}}$$

עבור גליל ריק :

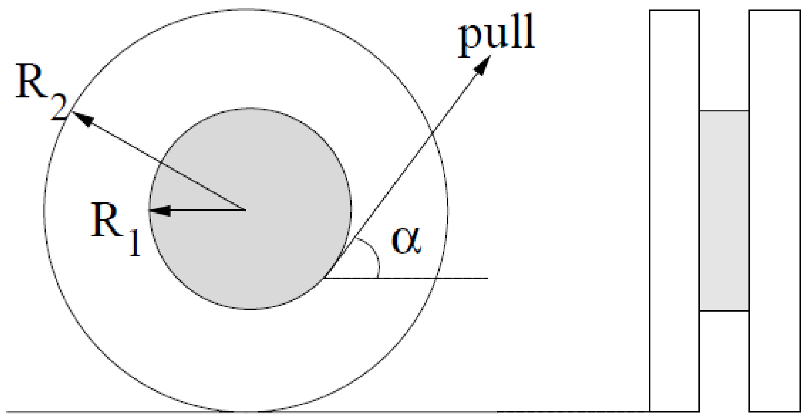
$$I = mR^2$$

$$V^2_{\text{גליל ריק}} = \frac{2gh}{2m} = \frac{gh}{m}$$

$$V_{\text{גליל ריק}} = \sqrt{gh/m}$$

השאלה:

A yo-yo (mass m) rests on the floor (the static friction coefficient with the floor is μ). The inner (shaded) portion of the yo-yo has a radius R1, the two outer disks have radii R2. A string is wrapped around the inner part. Someone pulls on the string at an angle α (see sketch). The "pull" is very gentle and carefully increased until the yo-yo starts to roll. (Try it at Home; it's Fun!) For what angles of α will the yo-yo roll to the left and for what angles to the right?



הפתרון:

ננסח את משוואות החוק השני של ניוטון עבור הכוחות בכיוון ציר ה-X למקרה בו היו-יו מאיץ ימינה:

$T\cos(\alpha)-f=ma$ מכאן נוכל לחלץ ביטוי לכח החיכוך $f=T\cos(\alpha)-ma$.

נבחר את ציר X החיובי בכיוון ימין וסיבוב חיובי נגד כיוון השעון, כך שבתאוצה חיובית תתקיים תאוצה זוויתית שלילית ולהפך. ננסח את משוואות החוק השני של ניוטון עבור המומנטים בכיוון ציר ה-X לאותו מקרה: $TR_1-fR_2=-I\alpha$ כל זמן שהמשיכה עדינה מספיק יהיה גלגול ללא החלקה ולכן נוכל להשתמש בקשר $\alpha=\frac{a}{R_2}$ כלומר משוואת המומנטים תהיה $TR_1-fR_2=-I\frac{a}{R_2}$.

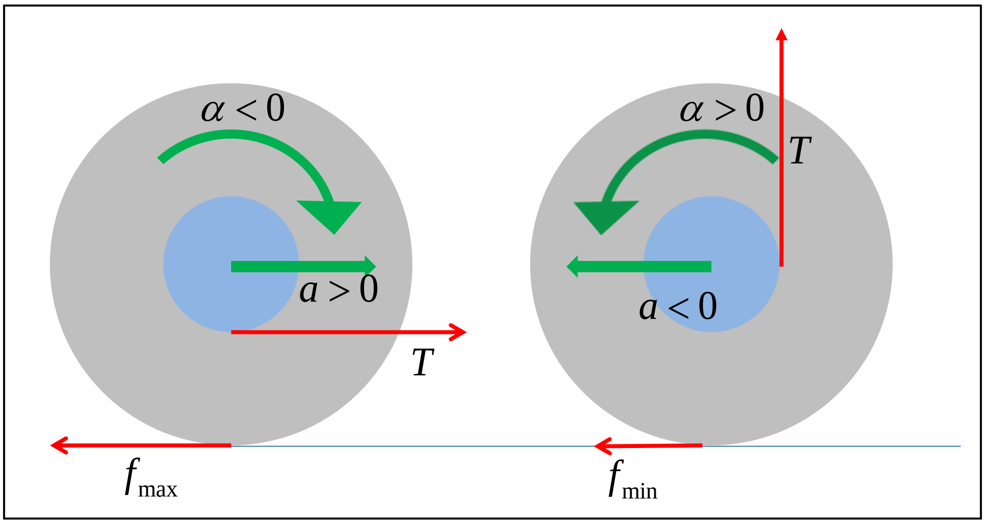
הצבת כח החיכוך שנמצא במשוואת הכוחות למשוואת המומנטים יאפשר לנו לבודד את פרמטר התאוצה:

$$TR_1-(T\cos(\alpha)-ma)R_2=-I\frac{a}{R_2} \quad\Rightarrow\quad a=\frac{T\left(\cos(\alpha)-\frac{R_1}{R_2}\right)}{\frac{I}{R_2^2}+m}$$

מביטוי זה קל לראות שכאשר $\cos(\alpha)>\frac{R_1}{R_2}$ (זוויות קטנות) התאוצה תהיה חיובית והיו-יו ינוע ימינה ולהפך. הזוויות הקריטית בה כיוון התנועה יתהפך היא $\cos(\alpha)=\frac{R_1}{R_2}$.

ניתוח איכותי של התנועה מגלה שהיו-יו יכול להתגלגל לשני הכיוונים, כאשר המשיכה היא כלפי מעלה ו- $\alpha=\frac{\pi}{2}$ היו-יו יתגלגל נגד כיוון השעון וינוע שמאלה, כאשר המשיכה היא אופקית ו- $\alpha=0$ היו-יו יתגלגל עם כיוון השעון וינוע ימינה. חשוב לשים לב שבתיאור התנועה של היו-יו מופיעים מומנטים שגורמים לגלגול וכוחות שגורמים לתנועה מרכז המסה. נבחר את ציר X החיובי בכיוון ימין וסיבוב חיובי נגד כיוון השעון, כך שבתאוצה חיובית תתקיים תאוצה זוויתית שלילית ולהפך.

כיוון תאוצת מרכז המסה של היו-יו זהה לכיוון סכום הכוחות בציר ה-X (בכל השאלה היו-יו לא מתרומם מהקרקע), אם היו-יו מאיץ שמאלה אזי סכום הכוחות יהיה בכיוון זה אם התאוצה הזוויתית נגד כיוון השעון כך גם סכום המומנטים. באיור מוצגים הכוחות שפועלים על היו-יו בשני מצבי הקיצון בהם $\alpha=\frac{\pi}{2}$ ו- $\alpha=0$.



באיור ניתן לראות שכח החיכוך מופיע פעם עם ופעם נגד כיוון התנועה של מרכז המסה, סכומי המומנטים וסכומי הכוחות בבעיה משתנים כך שכיוון התנועה משתנה.

אם היו-יו מאיץ שמאלה היטל המתיחות יהיה קטן לימין לכן מתבקש כח גדול יותר שפועל שמאלה – כח החיכוך, סכום המומנטים במצב זה יהיה נגד כיוון השעון וזה יהיה כיוון תאוצת הגלגול. כאשר היו-יו מאיץ ימינה סכום הכוחות עליו גם הוא ימינה, אפילו שכח החיכוך מכוון שמאלה, סכום המומנטים במצב זה יהיה עם כיוון השעון וזה יהיה כיוון תאוצת הגלגול. שימו לה שבתנועה זו כיוון התאוצה של מרכז המסה זהה לכיוון כח החיכוך.

ניתן להציג את כח החיכוך כפונקציה של הזוויות והקבועים בבעיה. כח החיכוך מגיע למקסימום כאשר הזווית היא $\alpha=0$ ולמינימום כאשר $\alpha=\frac{\pi}{2}$, לכן גם מומנט הכח של החיכוך משתנה. המתיחות לעומת זאת נותרת קבועה וכך גם מומנט הכח שלה. נשים לב ש $m<\frac{I}{R_2^2}$ תמיד. תלות כח החיכוך בקבועים:

$$f=T\cos(\alpha)-ma=T\cos(\alpha)-m\frac{T\left(\cos(\alpha)-\frac{R_1}{R_2}\right)}{\frac{I}{R_2^2}+m}=T\cos(\alpha)\left(1-\frac{m}{\frac{I}{R_2^2}+m}\right)+\frac{mT\frac{R_1}{R_2}}{\frac{I}{R_2^2}+m}$$