נכתב ע"י עומר גולדברג ויאיר מזל

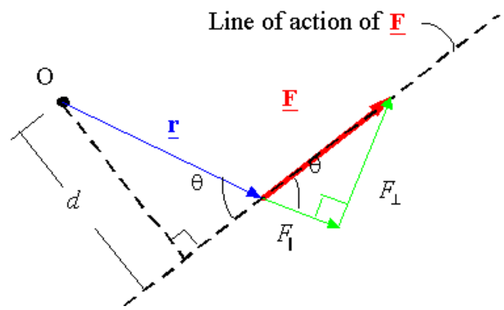
Physics1B 2017A

תרגול 11 – גוף קשיח

עד עכשיו עבדנו עם גופים נקודתיים. אבל בעבודה עם גופים כאלה אנחנו לא מתייחסים לאפשרות של הגוף להסתובב. לכן נעבור לגוף קשיח – גוף לא נקודתי שאינו משנה את הצורה שלו.

<u>מומנט כוח:</u> כוח יכול לגרום לגוף לתאוצה אבל יכול גם לגרום לגוף לסיבוב. הגדרת מומנט הכוח

$$\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F} = \vec{r}_\perp\times\vec{F} = \vec{r}\times\vec{F}_\perp$$



שימו לב שאנחנו צריכים לקבוע את ציר הסיבוב O.

$$|\vec{\tau}| = rF\sin\theta$$

זהו מומנט הכוח – המקביל לכוח בהקשר של סיבוב. כעת נרצה להקביל את החוק השני של ניוטון עבור סיבוב.

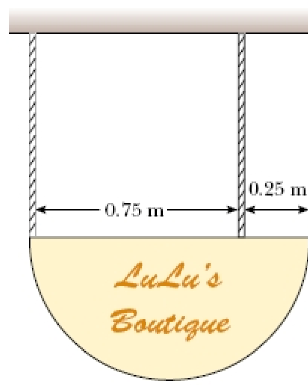
$$\sum \vec{\tau}_O = I_O\vec{\alpha}_O$$

כאשר I_O הוא מומנט ההתמד סביב הנקודה O ו-$\vec{\alpha}_O$ הוא התאוצה הזוויתית סביב אותה נקודה. כל הגורמים במשוואה הנ"ל תלויים בציר הסיבוב. חשוב להגדיר עבור כל משוואה מהו הציר הנבחר.

דגשים בתרגילים עם מומנט כוח והתמד

- בחירת ציר הסיבוב יכולה להקל על החשבון - אם מגדירים את ציר הסיבוב בנקודה שבה הכוח פועל, מומנט הכוח יהיה 0.
- כאשר מחשבים את גודל מומנט הכוח, חשוב לשים לב מהי הזווית בין הזרוע r לכוח F. בשביל למצוא אותה, עדיף להעתיק את אחד הווקטורים כך ששניהם יצאו מאותה נקודה.
- כאשר עובדים עם הגודל של τ, חשוב להוסיף סימן – חיובי אם הוא גורם לסיבוב נגד כיוון השעון ושלילי אם הוא גורם לסיבוב עם כיוון השעון.
- כאשר מחשבים מומנט התמד, שימו לב שהמרחק r הוא מציר הסיבוב ולא מנקודה. לדוגמא בגליל חלול שמסתובב סביב הציר הארוך שלו, המרחק של כל נקודה על הגליל מציר הסיבוב היא R רדיוס הגליל.
- בגוף קשיח מתייחסים למשקל ככוח שפועל על מרכז המסה.

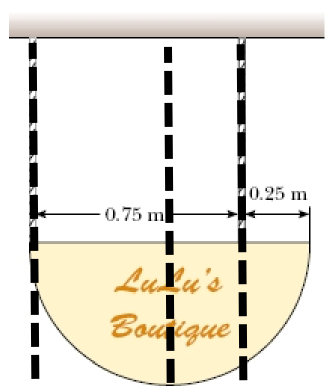
תרגיל 1 <1_6101>



במערכת אין תנועה קווית ואין תנועה סיבובית. נקבע את כיוון הצירים – קווית y הוא כלפי מעלה, וסיבוב נגד כיוון השעון הוא חיובי, ונקבע את הציר במרכז המסה, כך שהמומנט שהמשקל מייצר הוא 0. לכן:

$$\sum F_y = 0 \rightarrow T_1 + T_2 - mg = 0$$

כדי להקל על החשבון של הזרוע של כל אחד מהמומנטים ניתן לצייר קו מקביל למתיחויות שעובר דרך מרכז המסה, ולהמשיך את כל אחד מהקווים של המתיחויות. המרחק בין המקבילים הוא הזרוע בהתאמה



$$\sum \tau = 0 \rightarrow T_2 \frac{R}{2} - T_1 R = 0$$

$$T_2 = 2T_1$$

אם נציב את T_2 במשוואת הכוחות נקבל

$$3T_1 = mg \rightarrow T_1 = \frac{mg}{3}$$

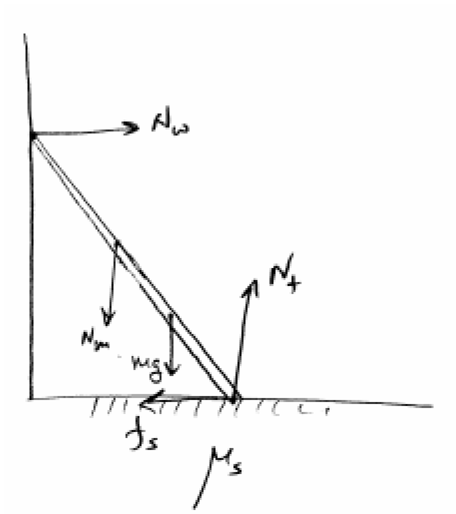
$$T_2 = \frac{2mg}{3}$$

שאלה 2 <1_6303>

בשאלה יש סולם שנשען על הקיר.

נתונים: אורך הסולם L, מסת הסולם m, גובה הקצה העליון של הסולם h, מסת האדם M ומקדם החיכוך הסטטי בין הסולם והרצפה.

א. נגדיר את הכוחות



N_w- הכוח הנורמלי מהקיר על הסולם.

N_F- הכוח הנורמלי מהרצפה.

N_m- הכוח הנורמלי שהאדם מפעיל על הסולם

f_s – כוח החיכוך הסטטי מהרצפה.

בנוסף קיים כוח הכבידה mg.

ב. על מנת שלא תהיה תנועה של הסולם, סך הכוחות והמומנטים צריך להיות 0.

כאשר אדם נמצא על הסולם, סך הכוחות עליו הוא 0, כלומר

$$N_m = Mg$$

נדרוש שסך הכוחות על הסולם יהיה גם כן 0, כלומר

בציר x

$$N_w - f_s = 0$$

בציר y

$$N_F - mg - N_m = 0$$

כלומר

$$N_w = f_s$$
$$N_F = (m + M)g$$

בנוסף נדרוש סך המומנטים יהיה 0. נבחר את ציר הסיבוב להיות בתחתית הסולם ואת הסיבוב נגד כיוון השעון ככיוון החיובי.

הזווית של הסולם עם הקרקע $\sin\theta = \frac{h}{L}$, $\cos\theta = \frac{\sqrt{L^2-h^2}}{L}$

מכיוון שהזרוע של כוח החיכוך והנורמל מהקרקע הם אפס, במקרה הזה המומנטים הפועלים הם:

$$\tau_W = -L\sin\theta\, N_W = -N_w h$$

$$\tau_{mg} = \frac{L}{3}\cos\theta\;\; mg$$

$$\tau_{N_m} = x\cos\theta\, N_m = x\cos\theta\;\; Mg$$

משוואת המומנטים

$$x\cos\theta\, Mg + \frac{L}{3}\cos\theta\, mg - N_w h = 0$$

ממשוואת הכוחות

$$N_w = f_s \le \mu_s N_F = \mu_s(m+M)g$$

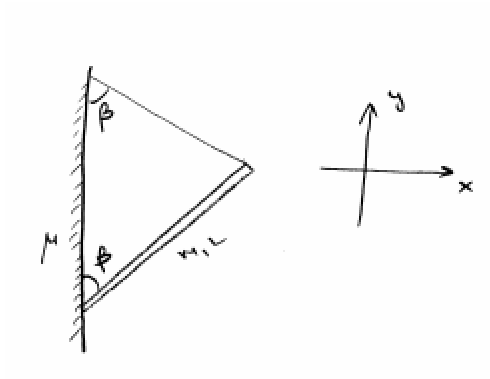
ולכן

$$x = \frac{N_w h}{Mg\cos\theta} - \frac{L}{3}\frac{m}{M} \le \frac{\mu_S(m+M)gLh}{Mg\sqrt{L^2-h^2}} - \frac{mL}{3M} = \frac{\mu_S(m+M)Lh}{M\sqrt{L^2-h^2}} - \frac{mL}{3M}$$

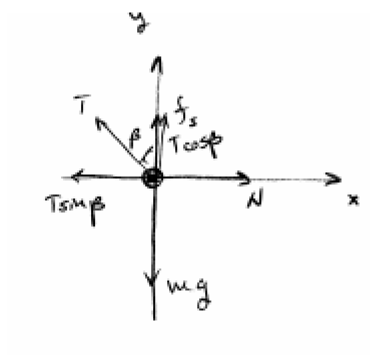
$$x \le \frac{\mu_S(m+M)Lh}{M\sqrt{L^2-h^2}} - \frac{mL}{3M} \approx 10.41\ m$$

תרגיל 3 <1_6300>

נתון מוט במסה m ואורך L, יש חיכוך עם הקיר. הזווית $\beta = 70°$



אילו כוחות פועלים על הגוף? מתיחות, נורמל מהקיר, ומשקל וחיכוך



הגוף נמצא במנוחה, לכן

ציר x

$$N - T\sin\beta = 0$$

ציר y

$$T\cos\beta + f_s - mg = 0$$

$$f_s \le \mu N$$

נקבל

$$f_s = mg - T\cos\beta \le \mu N = \mu T\sin\beta$$

יש לנו אי שוויון עם שני נעלמים, μ ו $T-$, ונצטרך למצוא את הקשר ביניהם באמצעות מומנטים.

על מנת להקל על החשבון, נקבע את ציר הסיבוב בנקודה בקיר, וכך מומנט הכוח של הנורמל והחיכוך הם 0.
נקבע את הכיוון החיובי נגד כיוון השעון.

המומנטים:

$$\tau_{mg} = -\frac{L}{2} mg \sin\beta$$

$$\tau_T = LT \sin 2\beta$$

סך המומנטים

$$\sum \tau = LT \sin 2\beta - \frac{L}{2} mg \sin\beta = 0$$

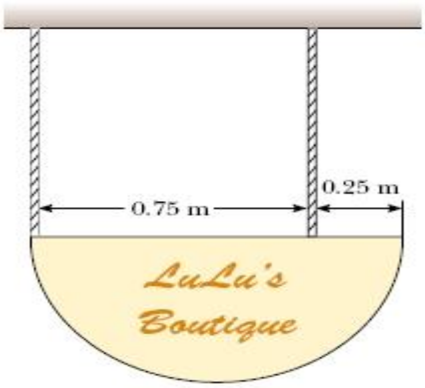
$$2T \cos\beta = \frac{mg}{2} \to T = \frac{mg}{4\cos\beta}$$

ולכן

$$mg - T\cos\beta = \frac{3mg}{4} \leq \frac{\mu mg \sin\beta}{4\cos\beta}$$

$$\mu \geq 3\cot\beta$$

פתרון תרגיל 6101_1:



נסמן את המתיחויות בחוטים בתור T_l ו- T_r. משוואת כוחות:

$$\sum F_y = 0 = mg - T_l - T_r \Rightarrow T_l + T_r = mg$$

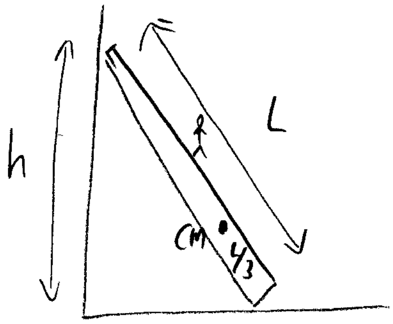
משוואת מומנטים סביב מרכז המסה (נבחר את כיוון השעון ככיוון חיובי):

$$\sum \tau = 0 = T_l \frac{L}{2} - T_r \frac{L}{4} \Rightarrow T_r = 2T_l$$

נפתור שתי משוואות בשני נעלמים ונקבל לבסוף:

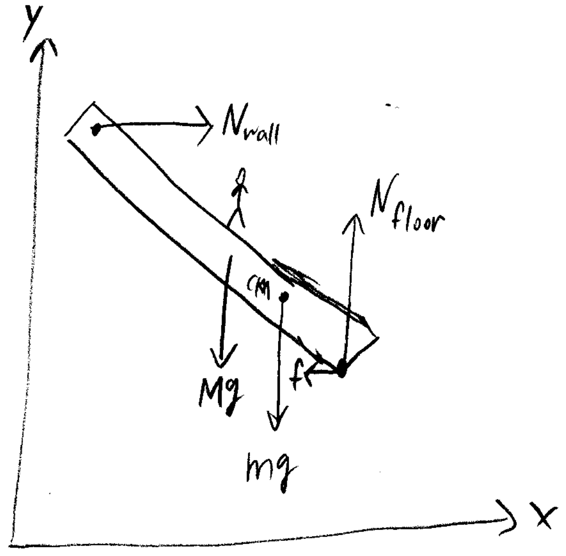
$$\boxed{T_l = \frac{mg}{3}; T_r = \frac{2mg}{3}}$$

1_6303 פתרון



נשרטט את כל הכוחות והמומנטים הפועלים על הסולם.

(הכח הנורמלי שהאדם
מפעיל הוא Mg, כי האדם
נמצא בשיווי-משקל ולכן גם
הנורמלי שלו שווה למשקלו)



שיקול - הכוחות בצירים x ו-y הם

$$\sum F_x = N_{wall} - f$$

$$\sum F_y = N_{floor} - Mg - mg$$

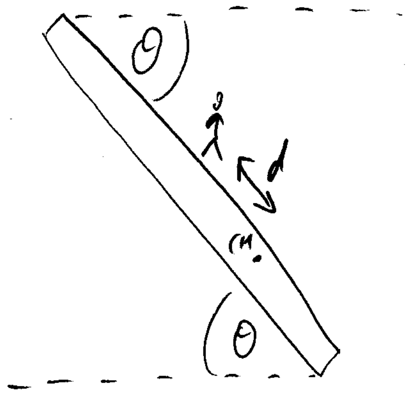
כיוון ששקול הכוחות בציר y הוא אפס, נקבל

$$\boxed{N_{floor} = (M+m)g}$$

מציר x נקבל $\boxed{N_{wall} = f}$. כדי למצוא את f נדרוש את שיקול
המומנטים ביחס לציר העובר דרך מרכז המסה.

המומנטים ג'י:

(נסמן ב-d את מרחק האדם ממרכז המסה)



$$\sin\theta = \frac{h}{L}$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{L^2-h^2}}{L}$$

$$\tau_{wall} = N_{wall} \cdot \frac{2L}{3} \cdot \sin\theta = N_{wall} \cdot \frac{2h}{3}$$

$$\tau_{🚶} = Mg \cdot d \cdot \cos\theta = Mg \cdot \frac{\sqrt{L^2-h^2}}{L} d$$ ($d = \frac{L}{6}$ כשזה מאוזן)

$$\tau_{floor} = N_{floor} \cdot \frac{L}{3} \cdot \cos\theta = N_{floor} \cdot \frac{\sqrt{L^2-h^2}}{3}$$

(mg לא יוצר מומנט כיוון פועל על מרכז המסה)

$$\tau_{friction} = f \cdot \frac{L}{3} \cdot \sin\theta = f \cdot \frac{h}{3}$$

ידוע שהסולם לא מסתובב כאשר האדם נמצא במרחק $d = \frac{L}{6}$ ממרכז המסה, נניח שכאשר $d = \frac{L}{6}$ שקול המומנטים הוא אפס, כלומר:

$$\tau_{floor} + \tau_{🚶} = \tau_{wall} + \tau_{friction}$$

$$N_{floor} \frac{\sqrt{L^2-h^2}}{3} + Mg \frac{\sqrt{L^2-h^2}}{L} d = N_{wall} \cdot \frac{2h}{3} + f \cdot \frac{h}{3}$$

במצב של שווי משקל, נציב:

$$\begin{cases} N_{wall} = f \\ N_{floor} = (M+m)g \end{cases}$$

ונסיק

$$(M+m)g\frac{\sqrt{L^2-h^2}}{3} + Mg\frac{\sqrt{L^2-h^2}}{L}d = f\cdot\frac{2h}{3} + f\cdot\frac{h}{3} \quad /:h$$

$$\boxed{f = (M+m)g\frac{\sqrt{L^2-h^2}}{3h} + Mg\frac{\sqrt{L^2-h^2}}{L}\frac{d}{h}}$$

עבור $d = \frac{L}{6}$ נקבל

$$f = (M+m)g\frac{\sqrt{L^2-h^2}}{3h} + Mg\frac{\sqrt{L^2-h^2}}{6h}$$

$$\boxed{f = \frac{\sqrt{L^2-h^2}}{3h}\left(\frac{3}{2}M + m\right)g}$$

d המקסימלי יתקבל כאשר כח החיכוך מקסימלי: $f_{max} = \mu_s N_{floor}$

כלומר $f_{max} = \mu_s(M+m)g$ $\quad f \le \mu_s(M+m)g$

נציב ב-d צריך לקיים:

$$(M+m)g\frac{\sqrt{L^2-h^2}}{3h} + Mg\frac{\sqrt{L^2-h^2}}{L}\frac{d}{h} \le \mu_s(M+m)g$$

ולכן

$$\boxed{d_{max} = \frac{M+m}{M}\left(\mu_s\frac{h}{\sqrt{L^2-h^2}} - \frac{1}{3}\right)L}$$

מוט מחליק

הגוף שלנו לא מחליק, כלומר הוא אינו זז בכלל. נתחיל מלרשום את משוואת הכוחות בשני הצירים:

$$\sum F_x = N - T\sin\beta = 0$$
$$\sum F_y = T\cos\beta + f - mg = 0$$
$$\Downarrow$$
$$N\cot\beta + f - mg = 0$$

נוסיף לתערובת ביטוי על המומנטים , כאשר נבחר את הציר להיות הקצה הימני של המוט. המטרה בבחירה זו היא לא להוסיף עוד פעם את המתיחות למשוואות. נקבל:

$$mg\frac{L}{2}\sin\beta - fL\sin\beta + NL\cos\beta = 0$$
$$mg - 2f + 2N\cot\beta = 0$$

חיבור משוואה זו עם המשוואה שקיבלנו מהכוחות, נותן:

$$N\cot\beta + f - mg + mg - 2f + 2N\cot\beta = 0$$
$$f = 3N\cot\beta \leq \mu N$$
$$\mu \geq 3\cot\beta$$

וזה הפתרון.

כמובן שאפשר לפתור את השאלה גם סביב ציר אחר, בחירה פופולרית למשל תהיה סביב הקצה השמאלי של המוט. משם נקבל:

$$mg\frac{L}{2}\sin\beta - TL\sin 2\beta = 0$$

$$mg = 4T\cos\beta$$

והצבה של זה בביטויים של הכוח תחזיר אותנו לאותה התשובה כמובן.