מיקום מרכז המסה של מערכת ניתן ע"י הביטוי

$$\vec{R}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{R}_i}{\sum_i m_i} \tag{1}$$

כאשר m_i היא מסת חלק i, ו- $\vec{R}_i$ הוא וקטור המקום של מרכז המסה שלו. כל החישובים נעשים בקואורדינטות:

$$X_{cm} = \frac{\sum_i m_i X_i}{\sum_i m_i} \tag{2}$$

$$Y_{cm} = \frac{\sum_i m_i Y_i}{\sum_i m_i} \tag{3}$$

בצורות שבשאלה צפיפות החומר (ליחידת אורך) ρ אחידה, לכן כל מסה היא $m_i = \rho L_i$, כאשר L_i הוא אורך הצלע, ומרכז המסה של כל צלע נמצא באמצע.

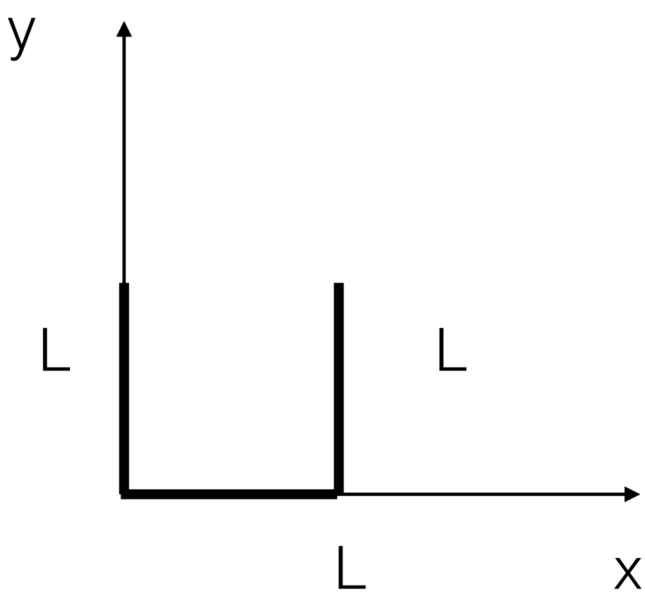


Figure 1:

$$X_1 = 0, \quad Y_1 = L/2, \quad m_1 = \rho L \tag{4}$$

$$X_2 = L/2, \quad Y_2 = 0, \quad m_2 = \rho L \tag{5}$$

$$X_3 = L, \quad Y_3 = L/2, \quad m_3 = \rho L \tag{6}$$

$$X_{cm} = L/2, \quad Y_{cm} = L/3 \tag{7}$$

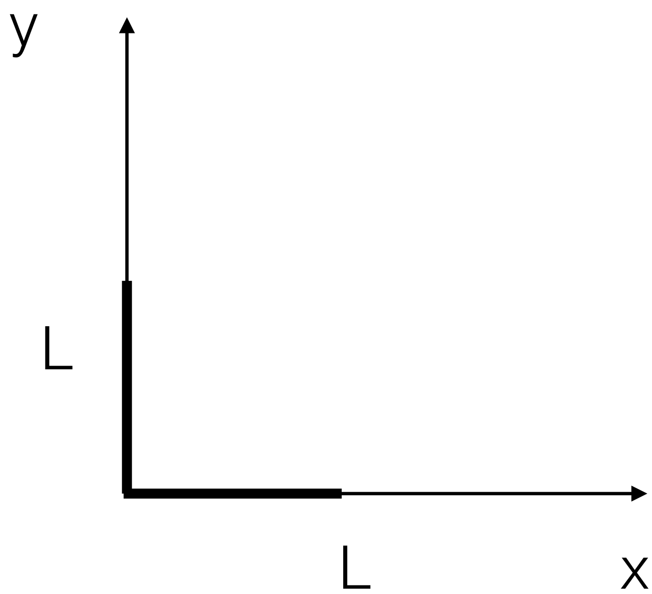


Figure 2:

$$X_1 = 0, \quad Y_1 = L/2, \quad m_1 = \rho L \tag{8}$$
$$X_2 = L/2, \quad Y_2 = 0, \quad m_2 = \rho L \tag{9}$$
$$X_{cm} = L/4, \quad Y_{cm} = L/4 \tag{10}$$

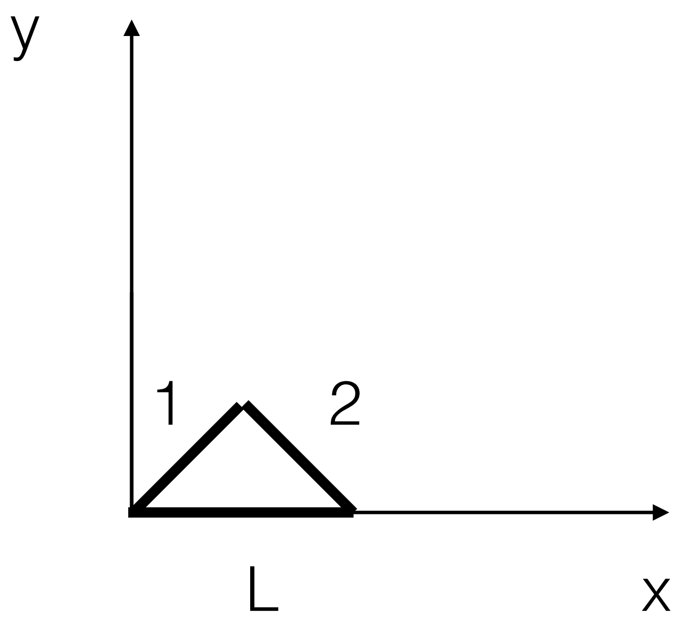


Figure 3:

אורך היתר הוא L לכן אורך הצלע הוא $l = L/\sqrt{2}$

$$X_1 = L/4, \quad Y_1 = L/4, \quad m_1 = \rho l \tag{11}$$
$$X_2 = 3L/4, \quad Y_2 = L/4, \quad m_2 = \rho l \tag{12}$$
$$X_3 = L/2, \quad Y_3 = 0, \quad m_3 = \rho L \tag{13}$$
$$X_{cm} = L/2, \quad Y_{cm} = \frac{L\sqrt{2}}{4(1+\sqrt{2})} \tag{14}$$

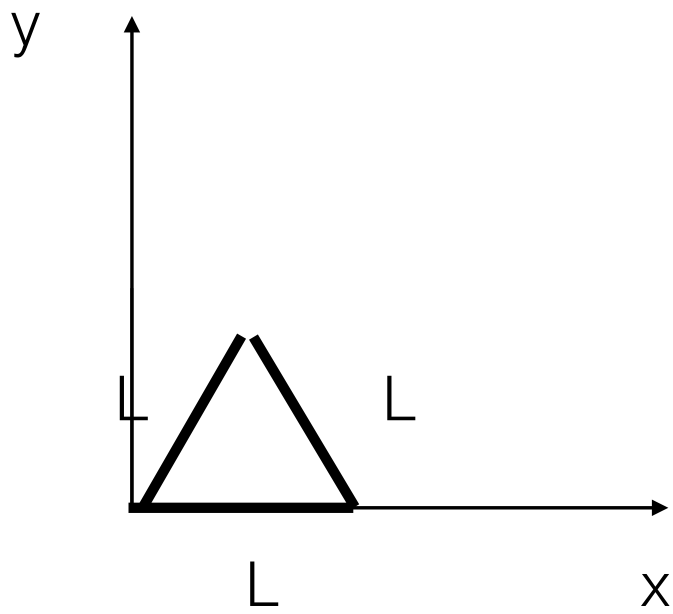


Figure 4:

$$X_1 = L/2, \quad Y_1 = 0, \quad m_1 = \rho L \tag{15}$$
$$X_2 = L/4, \quad Y_2 = L\sqrt{3}/4, \quad m_2 = \rho L \tag{16}$$
$$X_3 = 3L/4, \quad Y_2 = L\sqrt{3}/4, \quad m_3 = \rho L \tag{17}$$
$$X_{cm} = L/2, \quad Y_{cm} = L\sqrt{3}/6 \tag{18}$$

ריבוע מחורר

נסמן את מרכז המסה של הריבוע המלא ב X_{SQUARE}.
עכשיו נדמיין שכבר ניסרו את החור, אבל טרם הוציאו אותו. ברי שמרכז המסה של הגוף "ריבוע מחורר" + "חור" נמצא באותו מקום כמו קודם. אנחנו מחפשים את מרכז המסה של הגוף המחורר, אותו נסמן ב X_{CM}.
בנוסף, נסמן את מרכז המסה של המעגל שאנחנו מתכננים להוציא כך: X_{CIRCLE}.
נמצא את מרכז המסה של הגוף "ריבוע מחורר"+"חור", ונשווה אותו לריבוע שהיה קודם:

$$X_{\text{SQUARE}} = \frac{(M-m)X_{\text{CM}} + mX_{\text{CIRCLE}}}{M-m+m}$$

עכשיו נסדר את המשוואה כך שתיתן לנו את מרכז המסה שאנחנו רוצים:

$$X_{\text{CM}} = \frac{MX_{\text{SQUARE}} - mX_{\text{CIRCLE}}}{M-m}$$

אם נבחר את נקודת היחוס שלנו כך שהאפס יהיה בריבוע, ומרכז המסה של העיגול יהיה ב d, נקבל:

$$X_{\text{CM}} = \frac{-m}{M-m}d$$

וזו התשובה.
דרך אחרת להסתכל על התוצאה שקיבלנו היא שמרכז המסה של הגוף המחורר שווה לחיבור של הריבוע עם חור, כאשר לחור יש מסה שלילית.

מוט מחליק

הגוף שלנו לא מחליק, כלומר הוא אינו זז בכלל. נתחיל מלרשום את משוואת הכוחות בשני הצירים:

$$\sum F_x = N - T\sin\beta = 0$$
$$\sum F_y = T\cos\beta + f - mg = 0$$
$$\Downarrow$$
$$N\cot\beta + f - mg = 0$$

נוסיף לתערובת ביטוי על המומנטים , כאשר נבחר את הציר להיות הקצה הימני של המוט. המטרה בבחירה זו היא לא להוסיף עוד פעם את המתיחות למשוואות. נקבל:

$$mg\frac{L}{2}\sin\beta - fL\sin\beta + NL\cos\beta = 0$$
$$mg - 2f + 2N\cot\beta = 0$$

חיבור משוואה זו עם המשוואה שקיבלנו מהכוחות, נותן:

$$N\cot\beta + f - mg + mg - 2f + 2N\cot\beta = 0$$
$$f = 3N\cot\beta \leq \mu N$$
$$\mu \geq 3\cot\beta$$

וזה הפתרון.

כמובן שאפשר לפתור את השאלה גם סביב ציר אחר, בחירה פופולרית למשל תהיה סביב הקצה השמאלי של המוט. משם נקבל:

$$mg\frac{L}{2}\sin\beta - TL\sin 2\beta = 0$$

$$mg = 4T\cos\beta$$

והצבה של זה בביטויים של הכוח תחזיר אותנו לאותה התשובה כמובן.

סולמות ונחשים

ככל השאלות בסגנון של סטטיקה של גוף קשיח, גם הפעם נדרוש שהגוף הן לא יאיץ קווית (סכום הכוחות יתאפס) והן לא יאיץ סיבובית (סכום המומנטים יתאפס). נסמן את הנורמל עם הקיר ב N_1, ואת הנורמל עם הרצפה N_2.

נסמן את החיכוך שפועל בנקודת המגע עם הרצפה ימינה, ב f.

הכוח האחרון שלא הוזכר הוא mg שפועל ממרכז הסולם כלפי מטה.

נתחיל ממשוואות הכוחות:

$$\sum F_x = f - N_1 = 0$$
$$\sum F_y = N_2 - mg = 0$$

נוסיף לזה את משוואת המומנטים (טורקים). נבחר כנקודת ציר את הפינה השמאלית של הסולם, מכיוון ששם פועלים שני כוחות וזה יקל עלינו. (כמובן שניתן לבחור כל נקודה):

$$mg\frac{L}{2}\cos\alpha - N_1 L\sin\alpha = 0$$
$$mg = 2N_1\tan\alpha$$

נשתמש במשוואה שקיבלנו מהמומנטים במשוואה על ציר y לקבל:

$$N_2 = 2N_1\tan\alpha$$

משוואת הכוחות על ציר x בשילוב עם התנאי של חיכוך סטטי נותנת:

$$f = N_1 \le \mu N_2$$

ונותר רק להציב את N_2:

$$N_1 \le \mu N_2 = \mu 2N_1\tan\alpha$$
$$1 \le \mu 2\tan\alpha$$
$$\arctan\frac{1}{2\mu} \le \alpha$$

וקיבלנו תנאי מינימלי לאלפה, שכמובן לא כולל את מסת הסולם או אורכו שלא ניתנו לנו בתרגיל.

גשר על מים סוערים

משוואת הכוחות על הגשר נותנת לנו:

$$T_R + T_L - N - m_B g = 0$$

משוואת הכוחות על הילד נותנת לנו:

$$N - m_c g = 0$$

חיבור של המשוואות יתן:

$$T_R + T_L - m_c g - m_B g = 0$$

נחשב את המומנטים, ביחס לציר שעובר במרכז הגשר, כאשר נסמן את מיקום הנער בx:

$$\begin{aligned} T_R\frac{L}{2} - Nx - T_L\frac{L}{2} &= 0 \\ T_R\frac{L}{2} - m_c g x - T_L\frac{L}{2} &= 0 \\ T_R - T_L - 2m_c g\frac{x}{L} &= 0 \end{aligned}$$

כדי למצוא את הגבלות התנועה על הנער, פעם נחבר את המשוואות לקבלת הגבול על המתיחות מימין, ופעם נחסר בשביל הגבול על המתיחות משמאל:

$$\begin{aligned} 2T_R - m_B g - m_c g\left(2\frac{x}{L} + 1\right) &= 0 \\ T_R = \frac{m_B g}{2} + \frac{m_c g}{2}\left(2\frac{x}{L} + 1\right) &\le T_{R_{\text{מקס}}} \\ m_c g\frac{x}{L} &\le T_{R_{\text{מקס}}} - \frac{m_B g}{2} - \frac{m_c g}{2} \\ x &\le \left(\frac{T_{R_{\text{מקס}}}}{m_c g} - \frac{m_B}{2m_c} - \frac{1}{2}\right)\cdot L \\ x &\le \left(\frac{350N}{40kg10\frac{N}{kg}} - \frac{20kg}{80kg} - \frac{1}{2}\right)\cdot 2m \\ x &\le 0.25m \end{aligned}$$

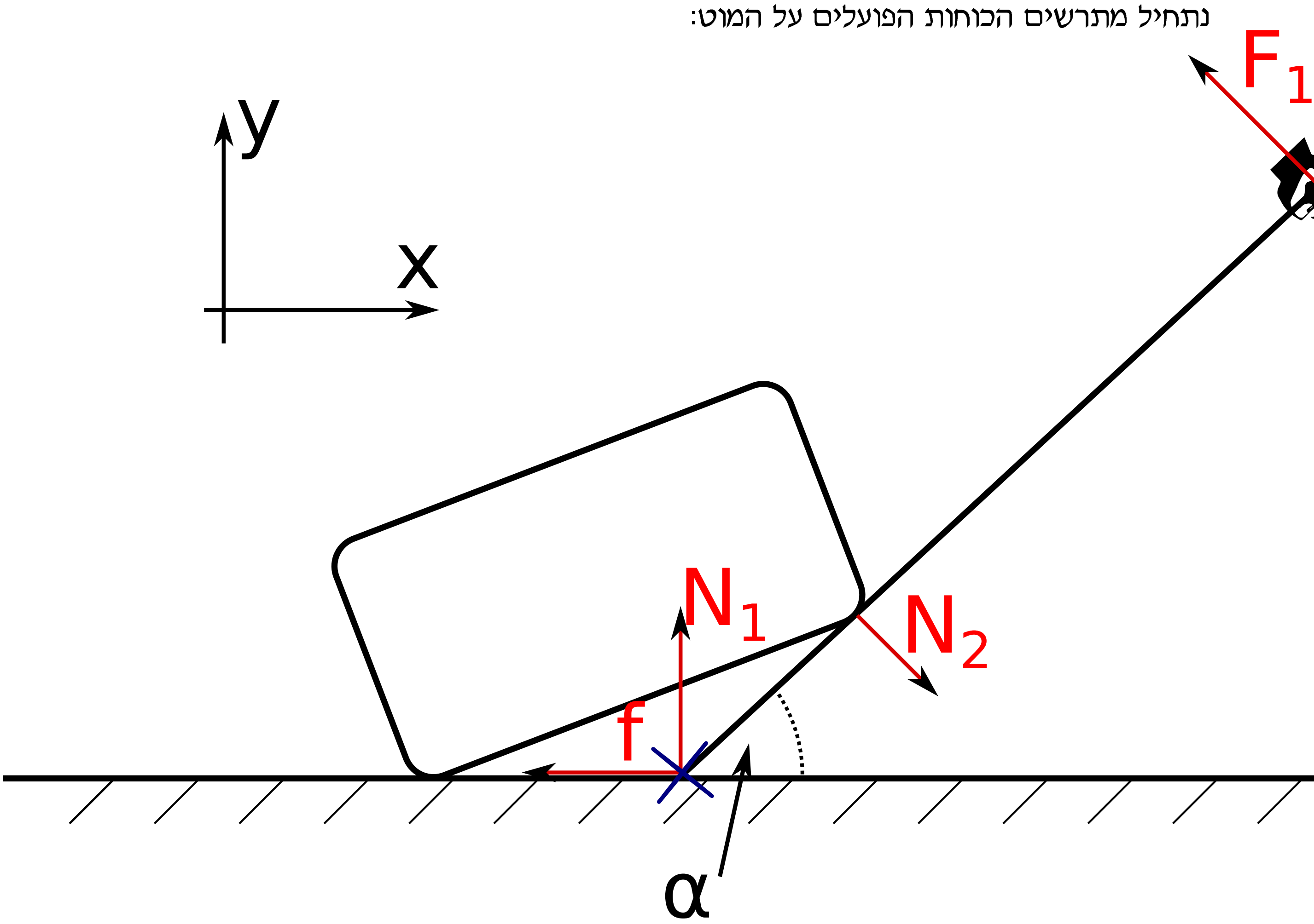
חיסור המשוואות בעצם אומר להחליף את T_R ב T_L, ואת x ב$-x$:

$$\begin{aligned} -x &\le \left(\frac{T_{L_{\text{מקס}}}}{m_c g} - \frac{m_B}{2m_c} - \frac{1}{2}\right)\cdot L \\ x &\ge -\left(\frac{400N}{40kg10\frac{N}{kg}} - \frac{20kg}{80kg} - \frac{1}{2}\right)\cdot 2m \\ x &\ge -0.5m \end{aligned}$$

כלומר $-0.5m \le x \le 0.25m$

הרמת קופסאות

נתחיל מתרשים הכוחות הפועלים על המוט:



המערכת במנוחה, ולכן ידוע שסכום המומנטים מתאפס. נבחר כנקודת ציר את נקודת המגע עם הרצפה, ונחשב את המומנטים. נתון לנו שנקודת המגע של הפינה הימנית של הקופסא היא ברבע מאורך המוט. נסמן את אורך המוט בL ונקבל את סכום המומנטים:

$$\sum \tau = F_1 L - N_2 \frac{L}{4} = 0$$
$$F_1 L = N_2 \frac{L}{4}$$
$$N_2 = 4F_1$$

וקיבלנו שהכוח הפועל על הפינה הימנית של הקופסא הוא פי 4 מהכוח אותו אנחנו מפעילים. זו דוגמא ל"מכונה פשוטה" (חפשו בויקיפדיה), שעוזרת מאוד בביצוע מטלות. שימו לב שהעבודה שנעשית (אינטגרל על כוח כפול דרך) זהה כמובן. לא ניתן להרוויח אנרגיה מכלום, אבל ניתן להפעיל פחות כוח על דרך ארוכה יותר.

בשביל הכוח שהמוט מפעיל על הרצפה נוסיף את משוואות הכוחות בשני הצירים:

$$F_1 \cos\alpha - N_2 \cos\alpha + N = 0$$
$$-F_1 \sin\alpha + N_2 \sin\alpha - f = 0$$

נקבל מיידית:

$$N = N_2 \cos\alpha - F_1 \cos\alpha = 4F_1 \cos\alpha - F_1 \cos 2\alpha = 3F_1 \cos\alpha$$

בשביל לקבל את החיכוך, נעזר בתנאי על חיכוך סטטי, יחד עם משוואת הכוחות בציר x:

$$
\begin{aligned}
f &\leq \mu_s N \\
f &= -F_1 \sin\alpha + N_2 \sin\alpha = -F_1 \sin\alpha + 4F_1 \sin\alpha = 3F_1 \sin\alpha \\
&= N \tan\alpha \\
N \tan\alpha &\leq \mu_s N \\
\mu_s &\geq \tan\alpha
\end{aligned}
$$

כאשר בדרך הצבנו $3F_1 \cos\alpha = N$.

קיבלנו תנאי על מקדם החיכוך שתלוי רק בזווית המוט.

Solution – The Seven Coins:

The moment of inertia is additive, hence we need to calculate the moment of inertia separately for each coin (around the required axis) and simply add.

Starting with the central coin:

$$I_{central} = \int r_{\perp}^2 dm = \left\{ \sigma = \frac{m}{\pi R^2} \right\} = \sigma \int_0^R r^2 r dr \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{2} m R^2$$

And then, using the perpendicular axes theorem for the other coins:

$$I_{outer} = \frac{1}{2} m R^2 + m \left(2R \right)^2$$

So finally-

$$I_{tot} = I_{central} + 6 I_{outer} = \frac{7}{2} m R^2 + 6m \left(2R \right)^2 = \boxed{\frac{55}{2} m R^2}$$

חישוב מומנט התמד של מערכת נקודות

מומנט ההתמד מוגדר :

$$I=\sum m_i r_i^2$$

שימו לב שהכוונה היא לציר שניצב לדף.

1. סביב מסה m1:

$$I=\sum m_i r_i^2=m_2 r_2^2+m_3 r_3^2=m_2 L^2+m_3(\sqrt{2}L)^2=\frac{m}{2}L^2+m2L^2=\frac{5}{2}mL^2$$

2. סביב מסה m3:

$$I=\sum m_i r_i^2=m_1 r_1^2+m_2 r_2^2=m_1(\sqrt{2}L)^2+m_2 L^2=\frac{m}{2}2L^2+\frac{m}{2}L^2=\frac{3}{2}mL^2$$

3. על מנת לעבור לציר מקביל העובר דרך מרכז המסה, ניתן להשתמש במשפט שטיינר (זיכרו: המשפט נכון אך ורק למעבר מ/אל מרכז המסה!)
עלינו לברר את המרחק של מרכז המסה מאחד הצירים שכבר חישבנו. קודם כל נברר את מרכז המסה, במערכת הצירים שמופיעה בשאלה. בציר X נקבל:

$$X_{cm}=\frac{m_1 L+m_2 0+m_3 0}{m_1+m_2+m_3}=\frac{\frac{m}{2}L}{2m}=\frac{L}{4}$$

ובציר Y:

$$Y_{cm}=\frac{m_1 0+m_2 0+m_3 L}{m_1+m_2+m_3}=\frac{mL}{2m}=\frac{L}{2}$$

עכשיו נותר לחשב את המרחק (בריבוע) בין מרכז המסה לאחת הנקודות שכבר חישבנו. אבחר את m1:

$$R_{cm\to m_1}^2=(L-\frac{L}{4})^2+\frac{L}{2}^2=\frac{13}{16}L^2$$

ומשפט שטיינר נותן לנו:

$$I_{cm}=Im_1-(m_1+m_2+m_3)R_{cm\to m_1}^2=\frac{5}{2}mL^2-2m\frac{13}{16}L^2=\frac{7}{8}mL^2$$