

חוט ומסמר

הכוחות הפועלים על המסה הם רק הכובד והמתיחות. בבעיה שלפנינו המתיחות תמיד ניצבת לתנועה ולכן היא אינה עושה עבודה. אם כן, יש שימור אנרגיה מכנית. נקבע את גובה האפס ($h_0 = 0$) בנקודת ההתחלה של התנועה. האנרגיה בהתחלה היא:

$$E_i = K_i + U_i = 0$$

כשהחוט בזווית α , הגוף נמצא בגובה:

$$h_1 = \frac{L}{2}(\cos \alpha - 1)$$

לכן האנרגיה המכנית בסוף היא:

$$E_f = K_f + U_f = \frac{mv_1^2}{2} + mg\frac{L}{2}(\cos \alpha - 1)$$

כמו שאמרנו קודם לא נעשית עבודה אחרת ולכן האנרגיה נשמרת, ונקבל:

$$\begin{aligned} E_i &= E_f \\ 0 &= \frac{mv_1^2}{2} + mg\frac{L}{2}(\cos \alpha - 1) \\ v_1^2 &= gL(1 - \cos \alpha) \end{aligned}$$

בסעיף הבא שואלים לגבי המתיחות. בחלק הזה של השאלה, התאוצה הרדיאלית צריכה להיות שווה ל:

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{L/2} = 2\frac{v^2}{L}$$

הכוחות ברכיב הרדיאלי הם:

$$T + mg \cos \alpha$$

ולכן:

$$\begin{aligned} T + mg \cos \alpha &= 2m\frac{v^2}{L} \\ \frac{T}{m} &= 2\frac{v^2}{L} - g \cos \alpha = 2g(1 - \cos \alpha) - g \cos \alpha = g(2 - 3 \cos \alpha) \end{aligned}$$

כאשר הצבנו בדרך את המהירות בזווית תטא שמצאנו בפרק הקודם. מכאן אנחנו מקבלים שכשהמתיחות מתאפסת, הקוסינוס שווה $\frac{2}{3}$.

לוח מסתו m נזר למנוק ציר x בהשדה הכח $\vec{F} = -\alpha x^2 \hat{x}$ כאשר $\alpha > 0$

נתון כי בהתחלה $t=0$ מיקומו הוא x_i ומהירותו $v_i > 0$! $v(t) = v_i$; $x(t) = x_i$

א) מהי המהירות והמיקום הכח \vec{F} על המסה מניק x_i לנק x_f ?

ב) מהו ערך המהירות והמיקום הכח \vec{F} על המסה ?

ג) מהי המהירות והמיקום הכח \vec{F} על המסה ?

$$W = \int_{x_i}^{x_f} \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\alpha \int_{x_i}^{x_f} x^2 dx = -\frac{\alpha}{3} (x_f^3 - x_i^3) = \frac{\alpha}{3} (x_i^3 - x_f^3)$$

$$W_{i \rightarrow f} = \Delta K_f - \Delta K_i$$

המכונה המהירות והמיקום

$$\frac{\alpha}{3} x_i^3 - \frac{\alpha}{3} x_f^3 = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

$$\frac{\alpha}{3} x_i^3 + \frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{1}{2} m v_f^2 + \frac{\alpha}{3} x_f^3 = \text{const} = E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{\alpha}{3} x^3$$

$$F = -\frac{dU}{dx} \Rightarrow U = -\int F dx = \frac{\alpha}{3} x^3$$

המהירות והמיקום

$$\frac{\alpha}{3} x_i^3 + \frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{\alpha}{3} x_f^3$$

ג) עבור מהירות $v_f = 0$ מהו המיקום הכח \vec{F} על המסה ?

$$x_f = \left(x_i^3 + \frac{3m}{2\alpha} v_i^2 \right)^{\frac{1}{3}}$$

Let the part of the chain that's not on the table be x , and let us define the 1D mass density $\lambda = M / L$. The total force acting on the chain as a function of x is-

$$F = \lambda x g - f = \lambda x g - \mu \lambda (L - x) g$$

Using the energy and work theorem we get-

$$E_k(f) - E_k(i) = W_{\text{tot}}$$

$$\frac{1}{2} m v_f^2 = \int_{x=L/4}^L F dx = \lambda g \int_{x=L/4}^L [x - \mu(L - x)] dx = \frac{3}{32} \lambda g L^2 (5 - 3\mu)$$

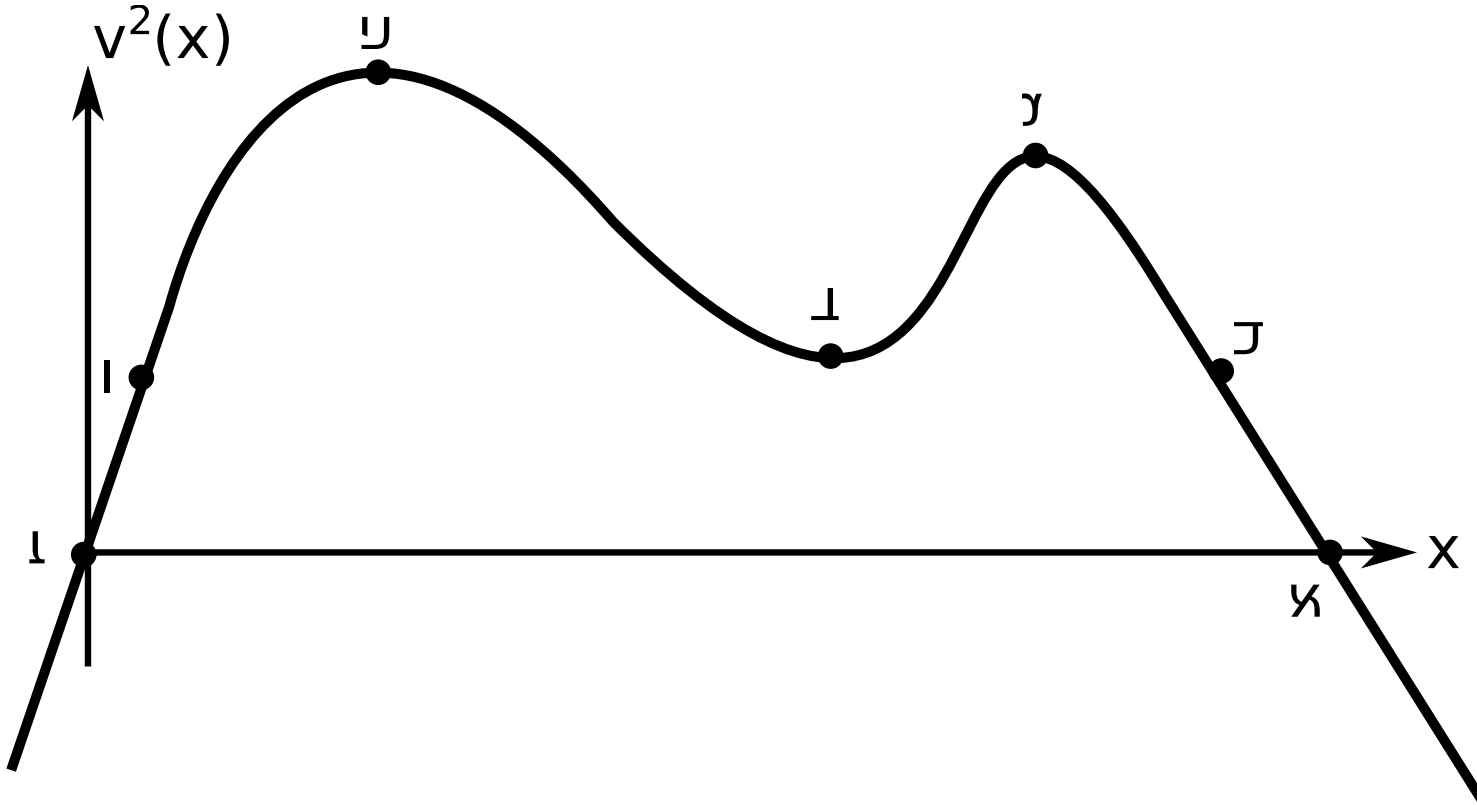
And finally-

$$v_f = \sqrt{\frac{3}{16} g L (5 - 3\mu)}$$

Notice that there is a condition for the sliding to even begin! What is it?

גרף עם פוטנציאל

- א. מהירות הגוף מתאפסת כאשר האנרגיה הקינטית מתאפסת, וזה קורה כשאין הפרש בין הקו המקווקו לגרף הפוטנציאל. זה קורה בשתי נקודות, א' וז'.
- ב. מהירות הגוף מקסימלית כשההפרש בין הקו המקווקו לגרף האנרגיה מקסימלי, וזה קורה בנקודה ה'.
- ג. הכוח מתאפס כשנגזרת הפוטנציאל מתאפסת, וזה קורה בג' ד' וה'.
- ד. כיוון הכוח נקבע על ידי הנגזרת. כאשר היא חיובית, הכוח שמאלה, וכשהיא שלילית הכוח ימינה. במקרה שלנו, הכוח ימינה בין ג' לד' ובין ה' לז', והכוח שמאלה בין א' לג' ובין ד' לה'.
- ה. המהירות בריבוע שווה להפרש בין הקו המקווקו לגרף הפוטנציאל, (עד כדי מסה חלקי שתיים), לכן פשוט צריך להפוך את הדף:



ו. הגוף לא יכול לנוע לאינסוף או למינוס אינסוף, ולכן הוא במסלול קשור.

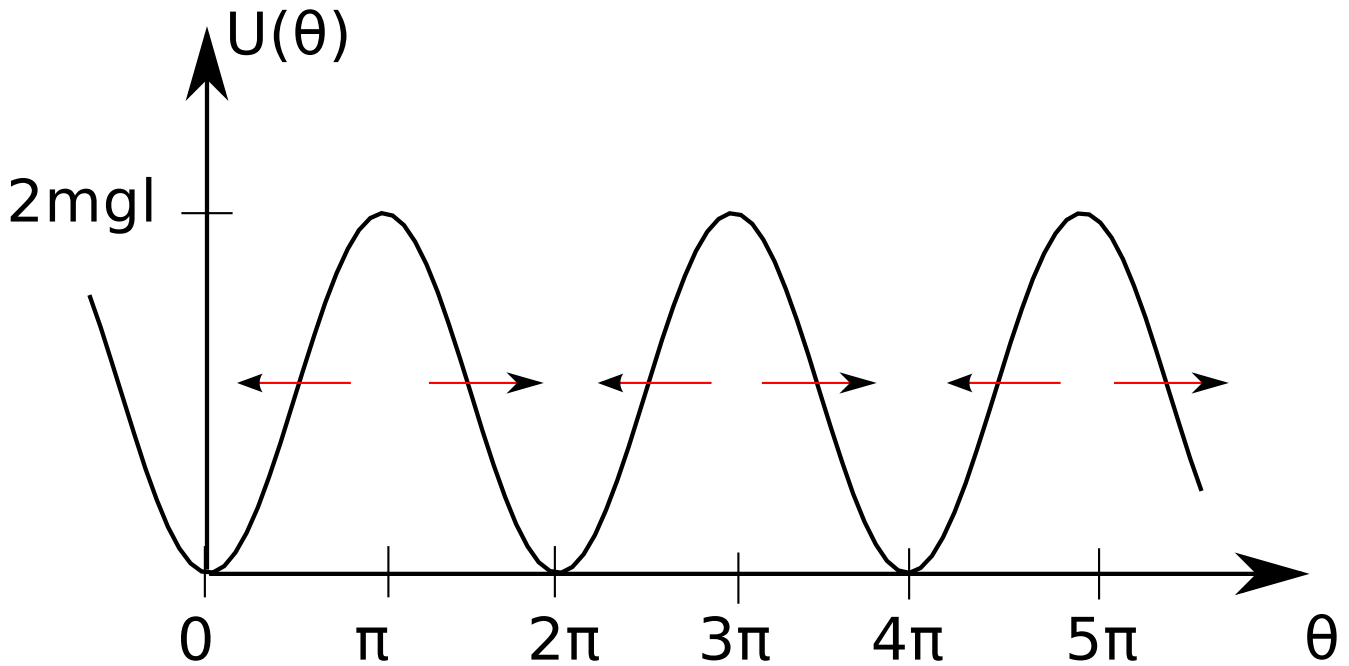
פוטנציאל של מטוטלת

א. על הגוף פועלים שני כוחות, כוח הכובד, והכוח של המוט. הכוח של המוט תמיד ניצב לכיוון התנועה ולכן לא עושה עבודה. כוח הכובד משמר כמות, עם פוטנציאל mgh .
 ב. האנרגיה הפוטנציאלית היא כאמור mgh . נבטא את גובה הגוף כתלות בזווית, כאשר נבחר קודם בצורה שרירותית את גובה ה-0 להיות בנקודה הכי נמוכה של הגוף. מטריגונומטריה נקבל:

$$h = l(1 - \cos \theta)$$

$$U(\theta) = mgh = mgl(1 - \cos \theta)$$

ג.



ד. החצים האדומים מציגים את כיוון הכוח.

ה. יש נקודות שיווי משקל (כאשר שיפוע הפוטנציאל 0), גם ב $\theta = 2\pi n$ וגם ב $\theta = 2\pi n + \pi$. הנקודות הנמוכות ($\theta = 2\pi n$) הן במינימום, והן יציבות. אלה הנקודות כאשר הגוף נמצא בתחתית המעגל. הנקודות הגבוהות הן במקסימום, והן לא יציבות. אלה המצבים בהם הגוף נמצא בנקודה העליונה במעגל.

ו. הגוף יכול לבצע הן מסלולים קשורים והן מסלולים לא קשורים. המסלולים הקשורים נמצאים בין שני פיקים של הפוטנציאל. מדובר במצב בו המטוטלת מתנדנדת הלוך ושוב. המסלולים הלא קשורים נמצאים מעל הפיקים של הפוטנציאל, ובמסלולים אלה גוף מבצע תנועה מעגלית כאשר כל הסיבובים לאותו כיוון. כמובן שהוא מאיט ומאיץ תוך כדי, אבל לא משנה כיוון.

ז. מצבים קשורים יתרחשו כאשר האנרגיה המכנית הכוללת נמצאת בין המינימום למקסימום של הפוטנציאל. שימו לב שהאנרגיה המכנית הכוללת, וגם המינימום והמקסימום תלויים בנקודת האפס שבחרתם, אבל כמובן שתחום האנרגיה הקינטית בתחתית המעגל חייב להיות זהה בכל הפתרונות. במקרה שלנו:

$$U_{min} < K_0 + U_0 < U_{max}$$

$$U_0 = U(0) = 0$$

$$U_{min} = U(0) = 0$$

$$U_{max} = U(\pi) = 2mgl$$

$$0 < K_0 < 2mgl$$