גוף מחליק

נפתור את השאלה ע"י חישוב העבודה שנעשתה על הגוף, והשוואת עבודה זו להפרש האנרגיה הקינטית.
על הגוף פועלים שלושה כוחות: הכובד (mg), הנורמל (N), והחיכוך (f).
הנורמל תמיד ניצב לתנועה, ולכן לא מבצע עבודה.

1. בקטע המעגלי (A-B) כיוון כוח הכובד הוא כלפי מטה, והחלק הרלוונטי מכוח זה (המקביל לכיוון התנועה) הוא: $mg\cos\theta$
כיוון כוח החיכוך הוא תמיד נגד כיוון התנועה, וגודלו משתנה על פי הנוסחא שניתנה לנו בשאלה.
המסלול שלנו הוא לאורך קשת המעגל, ולכן : $ds = Rd\theta$
לסיכום, סך העבודה שנעשתה על הגוף בקטע המעגלי היא:

$$W = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (mg\cos\theta - \frac{b}{\pi^4}\theta^3) Rd\theta = \left(mg\sin\theta - \frac{b}{\pi^4}\frac{\theta^4}{4}\right)R\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = mgR - \frac{b}{\pi^4}\frac{\pi^4}{64} = mgR - \frac{b}{64}R$$

נשאלנו מה יהיה המקדם b כך שמהירות בנקודה B תהיה זהה למהירות בנקודה A, כלומר שסך העבודה שנעשתה על הגוף היא אפס. התשובה היא כש $b = 64mg$

2. בסעיף זה שואלים, עם המקדם b שמצאנו, מה יהיה המרחק B-C. למעשה, אם המקדם b הוא שמצאנו, אנחנו יודעים שלא התבצעה על הגוף עבודה בקטע המעגלי, ולכן מהירותו בנקודה B שווה למהירותו ההתחלתית v0 מהנקודה A!
אז השאלה היא מה המרחק שיעבור גוף עם מהירות התחלתית v0, כאשר פועל עליו חיכוך עם המקדם μ
מכיוון שהגוף מונח על השולחן, ולא מאיץ בכיוון האנכי, הנורמל שווה לכוח הכובד (N=mg). ולכן החיכוך הקינטי הוא:
$f_k = \mu N = \mu mg$
ורק החיכוך הקינטי עושה עבודה (הכובד והנורמל אנכים לתנועה). נחשב את העבודה לאורך קטע באורך L.

$$W = \int_0^L -\mu mg dx = -\mu mgL$$

עכשיו נוסיף את התנאי שהמהירות הסופית היא 0, ובעזרת משפט העבודה-אנרגיה :

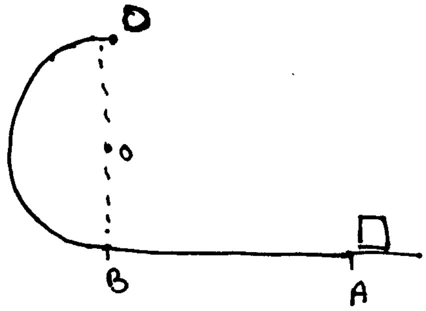
$$m\frac{0^2}{2} - m\frac{v_0^2}{2} = W = -\mu mgL$$

$$L = \frac{v_0^2}{2\mu g}$$

וזו התשובה לשאלה. כדאי לבדוק שהיחידות מסתדרות.

① 4.6 24-09-01

א)



ויש שימור אנרגיה היות והמשטח חלק ולכן:

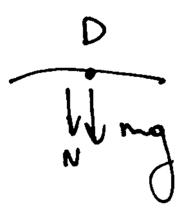
$$E_i = E_f$$

$$(1) \quad \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_D^2 + mgh_c \qquad h_c = 2R$$

(המינימלית)

נמצא את V_D ~~הקריטית~~ V הדרושה ~~להשלים~~ להמשך התנועה.

נסתכל על נק' D:



בנק' D:

$$\Sigma F_r = ma_r$$

$$\Sigma F_r = \frac{m v_D^2}{R}$$

$$N + mg = \frac{m V_D^2}{R}$$

$$\Rightarrow \quad V_D = \sqrt{\frac{NR}{m} + gR}$$

את המהירות הקריטית נקבל כאשר $N=0$ כלומר:

$$\boxed{V_{D_c} = \sqrt{gR}}$$

②

חזרה לשם (1) :

$$\frac{1}{2} m v_A^2 = \frac{1}{2} m \cdot gR + mg(2R)$$

$$v_A^2 = gR + 4gR$$

$$v_A = \sqrt{5gR}$$

(ג) נפתור סעיף זה ע"י קינמטיקה.

נחשב תחילה כמה זמן ייקח לגוף ליפול מגובה של (2R).

$$y = y_0 + v_{0y} \cdot t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

$$0 = 2R + 0 - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{4R}{g}$$

$$t = \sqrt{\frac{4R}{g}}$$

כעת נחשב את המרחק האופקי שהגוף עבר בזמן זה.

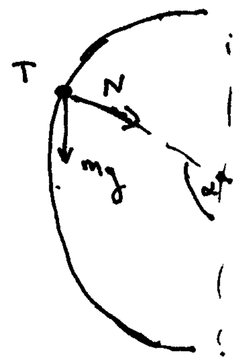
נשים לב שבנק' D המהירות שחישבנו בסעיף ג' V_{D_c} - היא ~~בכיוון~~ בכיוון האופקי בלבד (משיק).

$$X = X_0 + V_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

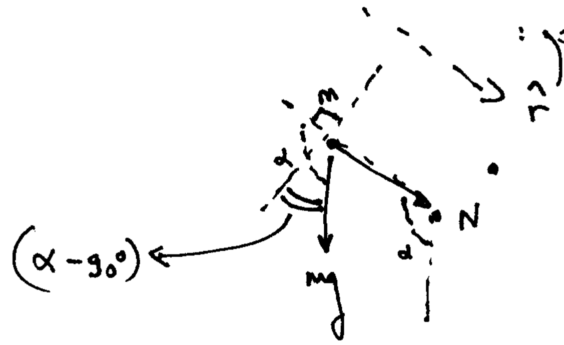
ביחס לנק' B $\rightarrow X = V_{0x} \cdot t = \sqrt{gR} \cdot \sqrt{\frac{4R}{g}} = 2R \quad (a_x = 0) \Longrightarrow$

תשובה סופית: הכדור יפגע ביחס לנק' A: במרחק של S−2R

ג. הגוף ינתק מהמסלול בנקודה בה $N=0$.



נבחר מערכת צירים כך:



$$\Sigma F_r = m\cdot a_r$$

$$N + mg\sin(\alpha-90^\circ) = m\cdot a_r$$

בנק' T בה מתקיים הנתון $N=0$ ולכן:

$$mg\sin(\alpha-90^\circ) = m\cdot a_r$$

$$(1)\quad \cancel{m}g\sin(\alpha-90^\circ) = \frac{\cancel{m}V_T^2}{R}$$

נסתכל על שימור האנרגיה:

$$E_i = E_f$$

$$\frac{1}{2}mV_A^2 = \frac{1}{2}mV_T^2 + mgh_T \qquad h_T = R + R\sin(\alpha-90^\circ)$$

$$V_A = 0.9\cdot\sqrt{5gR} = \sqrt{4.05\,gR}$$

$$\Rightarrow \quad V_T^2 = V_A^2 - 2gh_T \quad ,$$

4

(ii) $V_T^2 = 4.05gR - 2gR\left[1+\sin(\alpha-90^\circ)\right]$

נציב את הביטוי שקבלנו עבור V_T^2 במשוואה (i) ונקבל:

$g:/$ $\cancel{m}g\sin(\alpha-90^\circ) = \cancel{m}\;4.05g - 2g\cancel{R}\left[1+\sin(\alpha-90^\circ)\right]$

$3\sin(\alpha-90^\circ) = 2.05$

$\sin(\alpha-90^\circ) = 0.68$

$\Rightarrow \quad \alpha - 90^\circ = 43.10^\circ$

$\alpha = 133.10^\circ$ //

ב"ה

1_4117 - פתרון:

נתונים:

$$F(x)=\begin{cases} 2x & 0\le x\le 5 \\ 10 & 5\le x\le 15 \\ 40-2x & 15\le x\le 20 \end{cases}$$

$$m=5\,kg,\quad v_0=4\,m/s.$$

א. עבודה בכל אחד מהקטעים:

$$W_1=\int_{x=0}^{x=5}F_1(x)\,dx=\int_0^5 2x\,dx=\left[x^2\right]_0^5=25\,j \quad (1)$$

$$W_2=\int_{x=5}^{x=15}F_2(x)\,dx=\int_5^{15}10\cdot dx=\left[10\,x\right]_5^{15}=10(15-5)=100j \quad (2)$$

$$W_3=\int_{x=15}^{x=20}F_3(x)\,dx=\int_{15}^{20}(40-2x)\,dx=\left[40x-x^2\right]_{15}^{20}= \quad (3)$$

$$=40\cdot 20-20^2-40\cdot 15+15^2=25\,j$$

ב. לפי משפט עבודה-אנרגיה, השינוי באנרגיה הקינטית שווה לסך ב העבודה:

$$\Delta E=W_1+W_2+W_3=150\,j$$

ג. $$\Delta E=\frac{1}{2}mv_1^2-\frac{1}{2}mv_0^2$$

$$v_1^2=v_0^2+\frac{2\Delta E}{m}$$

מהירות הגוף לאחר 20 מטרים - $v_1=\sqrt{v_0^2+\frac{2\Delta E}{m}}=\sqrt{16+\frac{2\cdot 150}{5}}\approx 8.72\,m/s$

תנועה מעגלית זקופה

על מנת שהגוף יבצע תנועה מעגלית זקופה, נדרוש שהחוט יהיה מתוח בכל עת ($T \geq 0$). הנקודה הקריטית ביותר היא כשהגוף בשיא הגובה. מהירותו שם היא v_0. לכן, תאוצתו הרדיאלית לכיוון מרכז המעגל היא $\frac{v_0^2}{l}$. נרשום את משוואת החוק השני של ניוטון עבור הנקודה הכי גבוהה:

$$T + mg = m\frac{v_0^2}{l}$$
$$m\frac{v_0^2}{l} - mg = T \geq 0$$
$$v_0 \geq \sqrt{gl}$$

מעניקים לכדור $v_0 = 2\sqrt{gl}$. אנחנו יודעים על פי הסעיף הראשון שהגוף אכן יבצע תנועה מעגלית זקופה. אפשר למצוא את מהירות הגוף בכל זווית בעזרת משוואת שימור האנרגיה. נקבע את האפס במרכז המעגל, ונקבל:

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$
$$\frac{mv_0^2}{2} + mgl = \frac{mv^2}{2} + mgl\cos\theta$$
$$v^2 = v_0^2 + 2gl(1-\cos\theta) = 4gl + 2gl - 2gl\cos\theta = 2gl(3-\cos\theta)$$

אז יש לנו גוף שנע בתנועה מעגלית, ואנחנו יודעים את מהירותו בכל עת. על מנת לקבל את המתיחות בחוט, נרשום את משוואות החוק השני עבור הציר הרדיאלי :

$$T + mg\cos\theta = ma_r = m\frac{v^2}{l}$$
$$T = m\frac{v^2}{l} - mg\cos\theta = mg(6-2\cos\theta) - mg\cos\theta = mg(6-3\cos\theta)$$

אומרים לנו שהחוט יקרע בT_{max}. כלומר ב:

$$T = mg(6-3\cos\theta) = T_{max}$$
$$6mg - T_{max} = 3mg\cos\theta$$
$$\cos\theta = \frac{6}{3} - \frac{T_{max}}{3mg} = 2 - \frac{3.6}{3} = 0.8$$

את המהירות כפונקציה של הזווית כבר מצאנו מזמן, רק נציב את הזווית שחישבנו:

$$v_1 = \sqrt{gl(6-2\cos\theta)} = \sqrt{4.4gl}$$

לסעיף האחרון אנחנו צריכים את הרכיב האנכי של המהירות, ואת גובה הגוף ברגע הניתוק. יש לנו את גודל המהירות ואת הזווית, ולכן הכל ידוע. גובה הנתק (ביחס ל0 שקבעתי במרכז המעגל) הוא:

$$y_1 = l\cos\theta = 0.8l$$

ורכיב הy של המהירות:

$$v_{1y} = -v_1\sin\theta = -v_1\sqrt{1-\cos^2\theta} = -\sqrt{4.4gl}\sqrt{0.36} = -\sqrt{1.58gl}$$

נותר רק לרשום את משוואות התנועה של הגוף:

$$y = y_0 + v_0 t + a\frac{t^2}{2}$$

$$-3l = 0.8l - \sqrt{1.58gl}t - g\frac{t^2}{2}$$

$$\frac{g}{2}t^2 + \sqrt{1.58gl}t - 3.8l = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-\sqrt{1.58gl} \pm \sqrt{1.58gl + 4 \cdot 3.8l \cdot \frac{g}{2}}}{g}$$

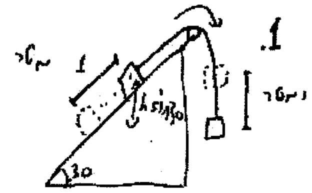
$$t_+ \approx 0.56s$$

הזמן החיובי הוא הזמן הרלוונטי בבעיה שלנו.

גלעד כהן 7 1_4106

1)

פתרון תרגיל 5



$h = 1m$ משתמשים בקיום התחלתי.

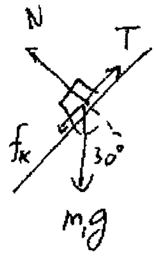
(נניח שגוף 2 נע בכיוון השעון).

$$\begin{cases} E_{התחלה} = m_2 g h \\ \quad \parallel \\ E_{סוף} = m_1 g h\sin30 + \frac{1}{2}m_1 v^2 + \frac{1}{2}m_2 v^2 \end{cases}$$

(אותה מהירות לשניהם (אותו חוט)).

$$v = \left[\frac{2}{m_1+m_2}(gh)\left(m_2 - \frac{m_1}{2}\sin30\right)\right]^{1/2} = \underline{\underline{8.85\,m/s}}$$

שימו לב שאם לא היינו יודעים מהן המסות אז $m_2 - m_1\sin30$ יכול להיות שלילי שזה אומר שגוף לא זולג נגד כיוון השעון אלא נגדו (הכוח עצמו כך) די ברור שגוף נע בכיוון השעון.



ב. (הביטוי לאנרגיה לא השתנה, פרט:)

$$E_{סוף} = E_{התחלה} + W_{f_k}$$

$$W_{f_k} = -f_k \cdot h = -\mu_k N h = -\mu_k m_1 g \cos30 \cdot h$$

כלומר:

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2 = (m_2 - m_1\sin30)gh - \mu_k m_1 g\cos30 h$$

$$\Downarrow$$

$$v = \underline{\underline{8.05\,m/s}}$$

קפיץ וחיכוך

בתנועה מA ל C פועלים כוחות הכובד, הנורמל, והחיכוך. הכובד משמר, הנורמל תמיד ניצב לתנועה ולכן אינו עושה עבודה, ואת עבודת החיכוך אנו יכולים לחשב. כוח החיכוך בקטע המדובר הוא:

$$f = \mu_k N$$

$$N - mg = 0$$

$$f = \mu_k mg$$

$$W = \int f dr = -\mu_k mgd$$

נסמן את גובה 0 במישור , ונשתמש במשפט עבודה אנרגיה:

$$\begin{aligned} K_i + U_i + W &= K_f + U_f \\ mgR - \mu_k mgd &= \frac{mv^2}{2} \\ v^2 &= 2g(R - \mu_k d) \end{aligned}$$

שימו לב שהמהירות בריבוע חייבת להיות חיובית, וזה נותן לנו תנאי לגבי האם בכלל הגוף יגיע לקפיץ.

הקפיץ מתכווץ בS, והשוואת האנרגיה מרגע הפגיעה בקפיץ ועד סיום ההתכווצות נותנת:

$$\begin{aligned} \frac{mv^2}{2} &= \frac{kS^2}{2} \\ 2mg(R - \mu_k d) &= kS^2 \\ k &= \frac{2mg(R - \mu_k d)}{S^2} \end{aligned}$$

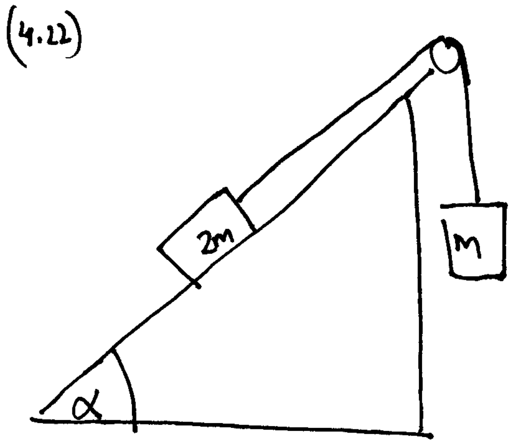
מכיוון שהחיכוך בהלוך ובחזור יעשה את אותה עבודה, ניתן פשוט לרשום את משפט העבודה-אנרגיה מתחילת התנועה ועד סופה:

$$\begin{aligned} mgR + W &= mgh \\ mgR - 2 \cdot \mu_k mgd &= mgh \\ h &= R - 2\mu_k d \end{aligned}$$

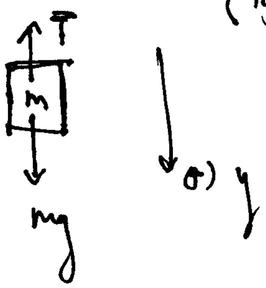
יש לשים לב ש$h > 0$. אם מקבלים גובה קטן מאפס, זה אומר שהגוף בכלל לא יסיים את התנועה, והחיכוך יעצור אותו בדרך.

(4.22)

ex-09-04



(א)

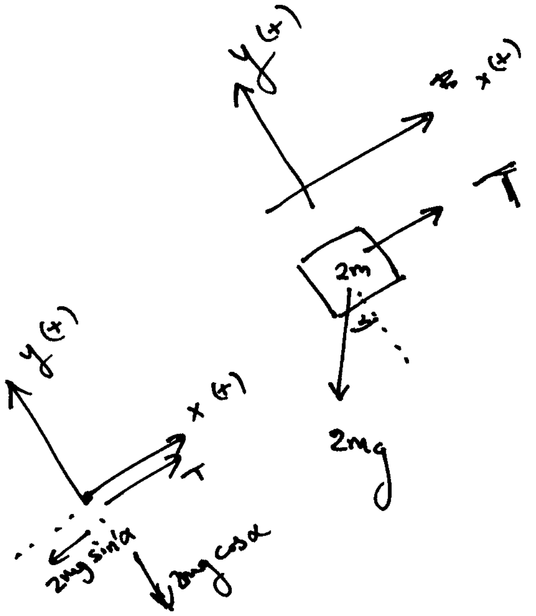


<u>עבור שמ:</u>

$$\Sigma F_y = 0$$

$$mg - T = 0 \Rightarrow \underline{mg = T} \quad (i)$$

<u>עבור המסה השניה:</u>



$$\Sigma F_x = 0$$

$$T - 2mg\sin\alpha = 0 \quad (ii)$$

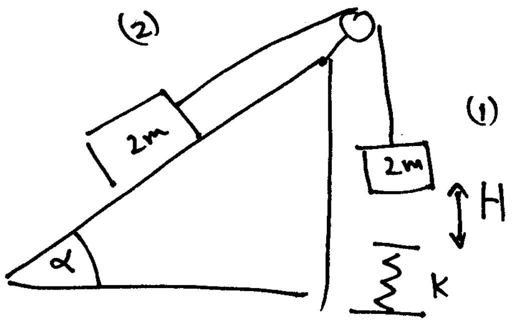
נציב את (i) ב(ii) ונקבל:

$$mg - 2mg\sin\alpha = 0$$

$$1 = 2\sin\alpha$$

$$\alpha = 30^\circ$$

(ד)



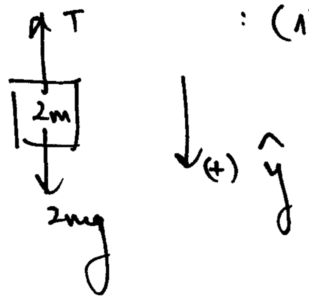
מצאנו את α

[illegible]

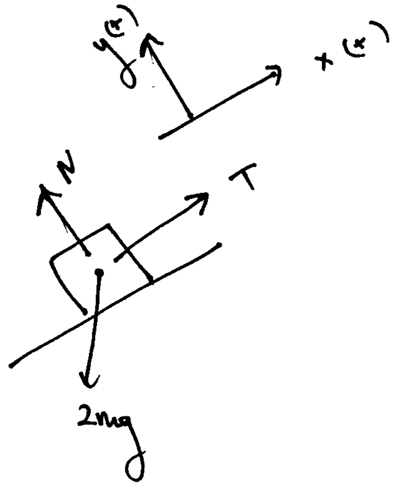
$(\alpha = 30^\circ)$

נסתכל על מסה (1):

$$\Sigma F_y = (2m)\cdot a_g$$



(i) $2mg - T = 2m\cdot a$



נסתכל על מסה (2):

$$\Sigma F_x = (2m)\cdot a$$

(ii) $T - 2mg\sin\alpha = 2m\cdot a$

נציב α ונקבל:

(ii) $T - mg = 2ma$

נחבר (i) + (ii) ונקבל:

$\boxed{mg = 4ma} \Rightarrow \boxed{a = g/4}$

$$V^2 = V_0^2 + 2a \cdot H$$

$$V^2 = 2 \cdot g/4 \cdot H \qquad (V_0 = 0)$$

$$V = \sqrt{gH/2} \quad //$$

$$m_1^* = m_2^* = 2m \; /$$

דרך נוספת - דרך שימור אנרגיה.

שימור האנרגיה הוא שימור אנרגיה של כל המערכת

$$E_i = E_f$$

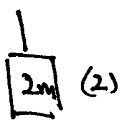
$$E_{1i} + E_{2i} = E_{1f} + E_{2f}$$

$$\frac{1}{2} m_1^* V_{1_0}^2 + m_1^* g h_{1_0} + \frac{1}{2} m_2^* V_{2_0}^2 + m_2 g h_{2_0}$$

$$= \frac{1}{2} m_1^* V_{1_f}^2 + m_1^* g h_{1_f} + \frac{1}{2} m_2^* V_{2_f}^2 + m_2 g h_{2_f}$$

הסימון (1) מתייחס למסה בשיפוע

לעומת הסימון (2) המתייחס למסה התלויה.



$i \Leftarrow$ מסמן התחלה.

$f \Leftarrow$ final סוף

שימו לב לכל אחד מהמסות ויש אנרגיה "גובה", ואנרגיה קינטית

ניתן להניח [לשים שלא חובים] $h_{1_0} = h_{2_0} = 0$

כמו כן $V_{1_0} = V_{2_0} = 0$ ולכן:

$$0 + 0 + 0 + 0 = \frac{1}{2}(2m)V^2 + 2mg(H\sin\alpha) + \frac{1}{2}(2m)V^2 + 2mg(-H)$$

נציב $\alpha = 30^\circ$ ונקבל:

$$0 = -mgH + 2mV^2$$

$$V = \sqrt{gH/2} \quad //$$

. הטף $x =$

סעיף (3):

$$E_{el_i} + E_{1_i} + E_{2_i} = E_{1_f} + E_{2_f} + E_{el_i}$$

$$0 + (0+0) + (0+0) = \tfrac{1}{2} m_1^* V_{1_f}^2 + m_1^* g h_{1_f} + \tfrac{1}{2} m_2^* V_{2_f}^2 + m_2^* g h_{2_f} + \tfrac{1}{2} k x^2$$

← מכיוון כי הכוח המושך את הגופים נותן משיכה במשך כל זמן כיווץ הקפיץ

ולכן: $V_{1_f} = V_{2_f} = 0$

[הנחה זו, לדעתי - לא מציאותית...]

$$0 = 0 + (2m) g (H+X) \sin 30^\circ + 0 - 2mg(H+X) + \tfrac{1}{2} k x^2$$

$$0 = mgH + mgX - 2mgH - 2mgX + \tfrac{1}{2} k x^2$$

$$0 = +\tfrac{1}{2} k x^2 - mgX - mgH$$

$$0 = x^2 - \frac{2mg}{k} X - \frac{2mgH}{k}$$

$$x_{1,2} = \frac{mg}{k} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{4m^2 g^2}{k^2}\right) + \frac{8mgH}{k}}$$

$$x_{1,2} = \frac{mg}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2mgH}{k}}$$

פיזיקלית - רק התשובה החיובית נכונה לנו !

$$X = \frac{mg}{k} + \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2mgH}{k}}$$