תרגול #6 - עבודה ואנרגיה

23 באפריל 2013

רקע תיאורטי

עבודה

עבודה מכנית המוגדרת בצורה הכללית ביותר באופן הבא:

$$W = \int_{\vec{l_i}}^{\vec{l_f}} \vec{F} \cdot \vec{dl}$$

היא כמות האנרגיה שמושקעת בגוף בעקבות כח $\vec{F}$ הפועל עליו, כאשר הגוף מבצע העתק (דרך) כלשהי. $\vec{dl}$ הוא אלמנט מסלול בכיוון התנועה. $\vec{l_i}$ ו- $\vec{l_f}$ הם וקטורי המיקום ההתחלתי והסופי בהתאמה.
בתוך האינטגרל אנו מבצעים **מכפלה סקלרית** $\vec{F} \cdot \vec{dl} = \left|\vec{F}\right| \left|\vec{dl}\right| \cos\theta$, כאשר θ היא הזוית הקטנה בין שני הוקטורים.
כאשר מדובר בכח **קבוע**, כלומר, כח שאינו תלוי בהעתק, אז מקבלים ביטוי יותר פשוט ונח לשימוש:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{\Delta l} = \left|\vec{F}\right| \left|\vec{\Delta l}\right| \cos\theta$$

אנרגיה

ישנו קשר בין עבודה לאנרגיה. יחידת האנרגיה/עבודה היא $[E] = [W] = N \cdot m = J$ ונקראית $Joule$. לגוף כלשהו יש אנרגיה, אנרגיה זו יכולה להיות מסוגים שונים. דוגמאות לאנרגיות שונות:

אנרגיה קינטית - אם לגוף יש מסה m ומהירות v, אזי תהיה לו אנרגיה קינטית שמחושבת על פי: $E_k = K = \frac{1}{2}mv^2$

אנרגיה פוטנציאלית - אנרגיה המשויכת למערכת אשר יכולה "לאגור" אנרגיה במצב מסויים (גוף בגובה h או קפיץ מכווץ באורך x) וברגע שחרור אנרגיה זו תומר לאנרגיה קינטית. למשל:

אנרגיה פוטנציאלית כובדית/גובה - כאשר אנו מרימים או מורידים חפץ לגובה מסויים כח המשיכה מבצע עבודה (חיובית או שלילית) וזו מתווספת/מוחסרת לגוף בצורה של אנרגיה: $U_g = -\int (\text{-}mg)\,dy = mgy$

אנרגיה פונטציאלית של קפיץ - כאשר מותחים או מכווצים גוף המחובר לקפיץ, כח הקפיץ מבצע עבודה (שוב, חיובית או שלילית) וזו מתווספת/מוחסרת לגוף בצורה של אנרגיה: $U_{sp} = -\int kx\,dx = \frac{1}{2}kx^2$

שימור אנרגיה

אנרגיה של גוף היא סכום האנרגיה הקינטית והאנרגיות הפוטנציאליות $E = K + U$.
כאשר הכוחות משמרים (כגון, קפיץ וכבידה) סך האנרגיה הכוללת של הגוף **נשמרת** (נשארת קבועה), גם אם האנרגיה הקינטית והאנרגיה הפוטנציאלית משתנות.

$$\begin{aligned} E_i &= K_i + U_i \\ E_f &= K_f + U_f \\ K_i + U_i &= K_f + U_f \\ \Delta K &= -\Delta U \end{aligned}$$

ואז, השינוי באנרגיה הקינטית שווה ל**מינוס** השינוי באנרגיות הפוטנציאליות (קפיץ/גובה וכו').

כח לא משמר

כאשר יש כח חיכוך מסוג כלשהו (חיכוך משטח קינטי, כח גרר וכו') - כח זה אינו משמר והוא גורם לאיבוד באנרגיה של הגוף.

$$\Delta E = E_f - E_i = W_{non-conservative}$$

משפט עבודה-אנרגיה

ישנו קשר בין העבודה המכנית שנעשית על/ע"י הגוף לבין השינוי באנרגיה הקינטית שלו:

$$W = \Delta K = K_f - K_i$$

שאלה 1_4118 - שרשרת

נתונה שרשרת בעלת צפיפות אחידה שמסתה m ואורכה L המונחת על שולחן חסר חיכוך, כאשר רבע מאורכה נשאר תלוי באוויר.
כמה עבודה יש להשקיע בכדי למשוך את השרשרת במלואה חזרה לשולחן?

פתרון

ניתן להסתכל על בעיה דומה בה 2 מסות מחוברות בחוט עם גלגלת. כדי להזיז את המסה על השולחן במהירות קבועה, יש להפעיל כח F אשר שווה למתיחות. מצד שני, המתיחות לאורך "החוט" תהא שווה, מהחוק ה־2 של ניוטון, לכח הכבידה הפועל על המסה התלויה.
אולם, נשים לב שבמקרה שלנו ככל שחלק השרשרת על גבי השולחן גדל אורך השרשרת התלוי באוויר קטן, ולכן גם המסה (ואיתה כח הכבידה) של החלק התלוי קטנה.
כלומר, כאשר מזיזים את השרשרת מרחק Δx, מסת החלק התלוי m_{hung} קטנה ב־ $\Delta m = \lambda \Delta y$. השרשרת לא נמתחת ולכן $\Delta y = \Delta x = x - x_0$ (λ היא צפיפות המסה ליחידת אורך והיא גודל קבוע). הכח שנפעיל על השרשרת כדי למשוך את השרשרת יהיה תלוי במיקומה:

$$F(x) = m_{hung} \cdot g = \lambda \left(\frac{L}{4} - \Delta x \right) g = \lambda \left(\frac{L}{4} - x \right) g$$

העבודה הדרושה כדי למשוך את השרשרת במלואה חזרה לשולחן היא:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} \vec{F} \cdot \vec{dx} = \int_{0}^{\frac{L}{4}} \lambda \left(\frac{L}{4} - x \right) g \, dx = \lambda g \left[\frac{L}{4} x - \frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{L}{4}} = \lambda g \frac{L^2}{16} \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{\lambda g L^2}{32}$$

שאלה 4103_1 ־ קפיץ אנכי

מסה m מופלת על קפיץ אנכי רפוי. קבוע הקפיץ הוא k. המסה נצמדת לקפיץ ומכווצת אותו עד לאורך כיווץ מקסימלי של d.

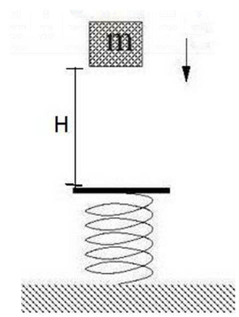
א. מה העבודה שנעשית על ידי כח הכבידה כאשר הקפיץ מתכווץ?

ב. מה העבודה שנעשית על הגוף על ידי הקפיץ כאשר הקפיץ מתכווץ?

ג. בטאו את מהירות המסה ברגע הפגיעה על ידי d, k, m.

ד. נתון כי המסה נפלה ממנוחה מגובה h, מצאו ביטוי הקושר את התכווצות הקפיץ d לגובה מעל הקפיץ ממנו החלה הנפילה h?

ה. אם גובה הנפילה יוכפל, מה יהיה הכיווץ המקסימלי של הקפיץ?



פתרון

א. מבקשים מאיתנו את העבודה שעושה כח הכבידה **בזמן** שהקפיץ מתכווץ. במהלך התכווצות הקפיץ הגוף מבצעת העתק בגודל d כלפי מטה. כח הכבידה הוא כח קבוע ולכן נחשב על פי:

$$W_g = \vec{F} \cdot \vec{dl} = mgd$$

כאשר השתמשנו בעובדה שכח הכבידה באותו כיוון של העתק הגוף. נבדוק (לשם האימון) כי אותה תוצאה מתקבלת גם באמצעות הביטוי האינטגרלי לעבודה. לשם כך נגדיר מערכת צירים כך שכיוון $\hat{y}$ החיובי הוא בכיוון למעלה והראשית היא הנקודה בה הקפיץ במצבו הרפוי.

$$W_g = \int \vec{F} \cdot \vec{dl} = \int_0^{-d} (-mg\hat{y})\,(dy\hat{y}) = -mg \int_0^{-d} dy = -mg\; y|_0^{-d} = mgd$$

(**הערה חשובה:** חשוב לזכור שכאשר מחשבים את האינטגרל $\vec{dl} = dl\,\hat{l}$ ואין צורך לבדוק את כיוונו. הסיבה לכך היא כיוון שגבולות האינטגרציה באינטגרל מסלול קובעות את הכיוון וכך הסימן זה נלקח בחשבון).

ב. הכח שמפעיל הקפיץ הינו כח משתנה, לכן נוכל הפעם להשתמש רק בביטוי של האינטגרל:

$$W_{sp} = \int \vec{F} \cdot \vec{dl} = \int_0^{-d} (-ky\hat{y})\,(dy\hat{y}) = -\left.\frac{kx^2}{2}\right|_0^{-d} = -\frac{1}{2}kd^2$$

(**הערה:** רשמנו את כח הקפיץ $-ky\hat{y}$, למרות שבתנועתו למטה הוא עם סימן חיובי. הסיבה היא שתמיד כח קפיץ נתון על ידי $-ky$ וסימנו של y הוא זה שיגרום לכח להיות חיובי או שלילי ־ בהתאם לבחירת מערכת הצירים והראשית).

ג. נגדיר את מהירות המסה ברגע הפגיעה כ־ v_0. אנו יודעים שמרגע פגיעת המסה בקפיץ ועד עצירתה, העבודה המכנית הכוללת היא סכום העבודה של כח הכובד והעבודה של הקפיץ.

$$W_{tot} = W_g + W_{sp} = mgd - \frac{1}{2}kd^2$$

ממשפט עבודה־אנרגיה קינטית העבודה הכוללת שווה לשינוי באנרגיה הקינטית, אולם בסוף המסה נעצרת ולכן:

$$\begin{aligned} W_{tot} &= \Delta K = K_f - K_i = 0 - \frac{1}{2}mv_0^2 \\ v_0 &= \sqrt{2gd - \frac{k}{m}d^2} \end{aligned}$$

ד. המסה נופלת ממנוחה מגובה h ופוגעת בקפיץ במהירות v_0 שחושבה בסעיף קודם. סך כל העבודה שנעשית על המסה מרגע נפילתה (במהירות אפס) לרגע בו היא מכווצת את הקפיץ באורך d (מגיעה שוב למהירות אפס) היא פשוט:

$$W_{tot} = mg\left(d+h\right) - \frac{1}{2}kd^2$$

$\Delta K = 0$ ולכן ממשפט עבודה־אנרגיה מקבלים את הקשר בין הגובה להתכווצות d:

$$h = \frac{kd^2}{2mg} - d$$

ה. נסדר את המשוואה כך שנראה כיצד d תלוי ב־h:

$$d^2 - \frac{2mg}{k}d - \frac{2mg}{k}h \quad = \quad 0$$

$$d = \frac{mg}{k}\left(1 \pm \sqrt{1+\frac{2kh}{mg}}\right)$$

הפתרון הפיסיקלי הוא הפתרון החיובי ולכן כאשר הגובה מוכפל $h \to 2h$ הכיווץ המקסימלי d הוא:

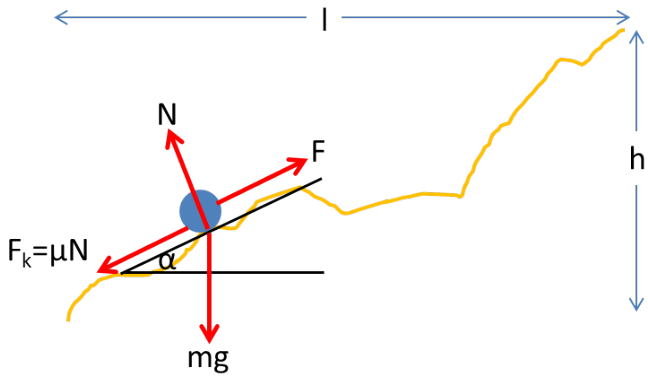
$$d = \frac{mg}{k}\left(1 + \sqrt{1+\frac{4kh}{mg}}\right)$$

שאלה 1_4120 - עליה בשיפוע עם חיכוך

גוף קטן m נמשך במהירות קבועה ע"י כח F אשר כיוונו תמיד משיק למשטח. מה העבודה של של כח זה אם ידוע כי גובה הגבעה h ואורך אופקי של בסיס הינו l ומקדם החיכוך הקינטי μ.

פתרון

המשטח יכול להיות בכל צורה שהיא ולכן נסתכל על נקודה רגעית בו מצוי הגוף ונשרטט דרכה משיק. נסמן את זווית השיפוע של המשיק ע"י α.
נשרטט תרשים כוחות: כח הכבידה mg כלפי מטה, כח הנורמלי N במאונך למשיק בנקודה, כח F המשיק לנקודה ובמעלה המסלול וכן כח חיכוך μN המשיק ובמורד המסלול (בכיוון הפוך לתנועתו).



נניח והכח F הוא כזה כך שהמסה נעה במהירות קבועה לאורך מסלולה, אזי:

$$\begin{aligned} N &= mg\cos\alpha \\ F &= \mu N + mg\sin\alpha = \mu mg\cos\alpha + mg\sin\alpha \end{aligned}$$

העבודה היא לפיכך:

$$W = \int \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int (\mu mg\cos\alpha + mg\sin\alpha)\, dl = \int \mu mg\cos\alpha dl + \int mg\sin\alpha dl$$

אבל $dx = \cos\alpha dl$ ו־ $dy = \sin\alpha dl$.

$$W = \int_0^l \mu mg\, dx + \int_0^h mg\, dy = \mu mgl + mgh$$