תרגול #5 ־ כוחות משתנים

17 באפריל 2013

רקע תיאורטי

כח משתנה כפונקציה של הזמן

F הוא פשוט פונקציה של הזמן, למשל: $\vec{F}=F_0\vec{\cos}\left(\omega t\right)$ הוא די נפוץ כאשר ω היא התדירות.

כח המשתנה כפונקציה של המהירות

F פרופורציוני למהירות בצורה כלשהי (ליניארי, ריבועי...). למשל: $\vec{F}_{drag}=-\gamma\vec{v}$ (גרר, התנגדות אוויר\גז או נוזל).
כאשר כח זה הוא הכוח היחיד הפועל על הגוף, נרשום את משוואת הכוחות:

$$m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}=-\gamma\vec{v}$$

אם התנועה היא במימד אחד (אחרת יש לפרק לרכיבים):

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{dt} &= -\frac{\gamma}{m}v\\
\frac{dv}{v} &= -\frac{\gamma}{m}dt\\
\ln v-\ln v_0 &= \ln\left(\frac{v}{v_0}\right)=-\frac{\gamma}{m}\left(t-t_0\right)\\
v &= v_0e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_0)}
\end{aligned}$$

פתרנו משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון, ולכן עלינו להציב תנאי התחלה אחד כדי לקבל פתרון יחיד. נשים לב כי המהירות קטנה באופן אקספוננציאלי. במקרים יותר מורכבים בו על הגוף פועל עוד כוחות מלבד כח גרר, יש להוסיף אותם למשוואת הכוחות ולפתור בהתאם.

כח המשתנה כפונקציה של המיקום

F פרופורציוני למיקום. למשל: קפיץ $\vec{F}_{sp}=-k\vec{\Delta x}=-k\left(\vec{x}-\vec{x_0}\right)$
כאשר כח זה הוא הכוח היחיד הפועל על הגוף, נרשום את משוואת הכוחות:

$$ma = m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\left(x-x_0\right)$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}\left(x-x_0\right)$$

קיבלנו משוואה דיפרנציאלית מסדר שני לא הומוגנית בגלל הקבוע $\frac{k}{m}x$. הפתרון הכללי יהיה הפתרון ההומוגני + הפתרון הפרטי. אנו נעשה זאת בדרך טיפה שונה. נגדיר משתנה חדש $\tilde{x} = x - x_0$. אם נגזור את המשתנה החדש לפי x נקבל: $\frac{d\tilde{x}}{dx} = 1 \ \Rightarrow d\tilde{x} = dx \ \Rightarrow$ $d^2\tilde{x} = d^2x$, ואז משוואת הכוחות תראה=:

$$\frac{d^2\tilde{x}}{dt^2} = -\frac{k}{m}\tilde{x} = -\omega^2\tilde{x}$$

קיבלנו משוואה הומוגנית אשר אנו יודעים את הפתרון שלה, פתרון הרמוני: $\tilde{x}\left(t\right) = A\cos\left(\omega t+\phi\right)$. כעת נציב חזרה את המשתנה הקודם שלנו x כיוון שהוא זה שמעניין אותנו:

$$x\left(t\right) = x_0 + A\cos\left(\omega t+\phi\right)$$

אנו פתרנו משוואה דיפרנציאלית מסדר שני ולכן יש לנו 2 קבועים A שהוא המשרעת (הגודל המקסימלי שבו הגוף מכווץ/מותח את הקפיץ) ו־ϕשהיא הפאזה. לכן אנו זקוקים ל־2 תנאי התחלה (מיקום + מהירות) כדי לקבל פתרון יחיד. x_0 הוא פשוט המיקום של נקודת שיווי המשקל ביחס לראשית.

ω היא **תדירות** התנועה ההרמונית של הקפיץ. במקרה הפשוט שלנו (רק קפיץ) $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, אולם במקרים יותר מורכבים היא יכולה לקבל ביטוי שונה. מזהים את התדירות **לפי המקדם** שמופיע לפני $\tilde{x}$ במשוואה הדיפרנציאלית לעיל.

שאלה 1_3307 ־ כוח גרר

במהירויות גבוהות, גודל כח החיכוך שמפעיל האוויר על כדור הוא מהצורה $F_d = -bv^2$.

א. מצאו את המהירות הסופית של כדור הנופל מגובה רב (אין צורך לפתור משוואה דיפרנציאלית).

זורקים כדור ישר למעלה במהירות התחלתית השווה למהירות הסופית מסעיף א.

ב. מהי תאוצת הכדור כאשר מהירותו שווה לחצי ממהירותו ההתחלתית כאשר הכדור בדרך למעלה?

ג. מהי תאוצת הכדור כאשר מהירותו שווה לחצי ממהירותו ההתחלתית, כאשר הכדור בדרך למטה?

פתרון

א. נניח והגוף משוחרר ממנוחה, אז כח הכבידה ברגע $t = 0$ הוא הכח היחיד הפועל עליו כלפי מטה ויש לגוף תאוצה g כלפי מטה אשר מגדילה את מהירותו בכיוון זה. ברגע שלגוף יש מהירות פועל עליו כח גרר שגודלו $F_d = bv^2$ וכיוונו **מנוגד** למהירות, כלומר כיוונו כלפי מעלה. משוואת הכוחות (בכל רגע) היא:

$$F_{total} = mg - bv^2 == ma = m\frac{dv}{dt}$$

כח הגרר הולך וגדל כיוון שמהירות הגוף הולכת וגדלה עד אשר (אחרי הרבה מאוד זמן) כח הגרר משתווה לכח הכבידה. שקול הכוחות עליו ברגע זה הוא אפס והגוף ממשיך בתנועתו עם מהירות קבועה (מהירות סופית). לכן, אין לנו צורך בלפתור משוואה דיפרנציאלית, כל שעלינו לעשות היא למצוא את המהירות בה הכוחות מאזנים אחד את השני:

$$\begin{aligned} mg &= bv^2 \\ v &= \sqrt{\frac{mg}{b}} \end{aligned}$$

ב. כעת, הגוף מתחיל עם מהירות התחלתית $v_0 = \sqrt{\frac{mg}{b}}$ כלפי מעלה. במצב זה כח הכובד וכח הגרר פועלים באותו כיוון (כלפי מטה), לכן:

$$\begin{aligned} F_{total} &= mg + bv^2 = ma \\ a &= g + \frac{b}{m}v^2 \end{aligned}$$

התאוצה כאשר המהירות קטנה ל- $v = \frac{1}{2}v_0 = \sqrt{\frac{mg}{4b}}$ בזמן עלייתו תתקבל פשוט על ידי הצבה:

$$a = g + \frac{b}{m}\frac{mg}{4b} = g + \frac{1}{4}g = \frac{5}{4}g$$

ג. כעת אנו רוצים לחשב בזמן ירידתו. במצב זה כח הכובד וכח הגרר פועלים באותו כיוון (כלפי מטה), לכן:

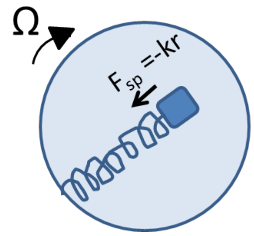
$$\begin{aligned} F_{total} &= mg - bv^2 = ma \\ a &= g - \frac{b}{m}v^2 \end{aligned}$$

התאוצה כאשר המהירות שוב שווה ל- $v = \frac{1}{2}v_0 = \sqrt{\frac{mg}{4b}}$ בזמן ירידתו, תתקבל פשוט על ידי הצבה:

$$a = g - \frac{b}{m}\frac{mg}{4b} = g - \frac{1}{4}g = \frac{3}{4}g$$

שאלה 1_5113 - קפיץ על דיסק מסתובב

דיסקה מסתובבת סביב צירה במהירות זוויתית Ω כמתואר בשרטוט. לדיסקה מחוברת מסה m באמצעות קפיץ בעל קבוע k. המסה יכולה לנוע רק לאורך הקוטר. כאשר הדיסקה לא מסתובבת המסה נמצאית במרכז והקפיץ במצבו הרפוי.
מצאו את התדירות בה המסה מבצעת תנודות.



פתרון

יש לפנינו מערכת (דיסקה) מסתובבת. כיוון שכך, על כל נקודה על הדיסקה יש תאוצה רדיאלית פנימה $\vec{a_r} = -\frac{v^2}{r}\hat{r} = -\Omega^2 r\hat{r}$ התלויה במרחקה r ממרכז הדיסקה (נגדיר $\hat{r}$ כך שהוא וקטור יחידה בכיוון רדיאלי אל מחוץ למעגל).
לשם נוחות, נעבור למערכת הדיסקה. במערכת זו הדיסקה נייחת, אולם היא מרגישה כח מדומה בכיוון הפוך לתאוצה הרדיאלית וגודלה

$$\vec{F}_{imag} = -m\vec{a}_r = \Omega^2 r\hat{r}$$

בנוסף לכך, על המסה פועל כח קפיץ אשר פרופורציוני למיקום המסה ביחס לנקודת שיווי המשקל (אורכו הרפוי של הקפיץ, אשר במקרה שלנו מיקומו במרכז הדיסקה) וכיוונו תמיד אל מרכז הדיסקה בין אם הקפיץ מכווץ או מתוח:

$$\vec{F}_{sp} = -kr\hat{r}$$

סך הכוחות על המסה במערכת המסתובבת (מע' הדיסקה):

$$F_{total} = -kr + m\Omega^2 r = -\left(k - m\Omega^2\right) r$$

לפי חוק שני של ניוטון $F_{total} = ma = m\frac{d^2r}{dt^2}$ ולכן נקבל:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{k - m\Omega^2}{m} r$$

קיבלנו משוואה דיפרנציאלית מן הצורה:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\omega^2 r$$

ואנו יודעים שפתרון המשוואה היא תנועה הרמונית $r(t) = A\cos(\omega t + \phi)$, כאשר ω מייצגת את התדירות של תנודות הגוף, ולכן:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \Omega^2}$$

נשים לב שכל עוד $\frac{k}{m} > \Omega^2$ אז תהיה לנו תנועה הרמונית, אחרת הביטוי מתחת לשורש שלילי והתנועה אינה יציבה.