תרגול #3 - תנועה מעגלית וכוחות

26 במרץ 2013

תנועה מעגלית

בתנועה מעגלית נח לבחור ראשית צירים כך שציר אחד הוא בכיוון הרדיאלי $\hat{r}$ (radial) וציר שני מאונך לו ובכיוון משיקי $\hat{t}$ (tangential). תנועה מעגלית מתאפשרת בזכות קיומה של תאוצה בכיוון הרדיאלי a_r. בכיוון המשיקי יתכן ותהיה תאוצה משיקית a_t, אך זו קובעת רק אם גודל המהירות המשיקית תשתנה.

- וקטור המהירות $\vec{v}$ בתנועה מעגלית **תמיד** משתנה, ובמקרה הפרטי בו $a_t = 0$ גודלה נשאר קבוע.
- וקטור המיקום $\vec{r}$ בתנועה מעגלית **תמיד** משתנה וגודלו שווה לרדיוס המעגל R (במידה והמרכז נבחר כראשית הצירים).

תנועה מעגלית קצובה

תנועה מעגלית בה **גודל המהירות** לא משתנה, אלא רק כיוונה.
גודל התאוצה הוא רדיאלי בלבד ($a_t = 0$) וניתן על ידי הנוסחה:

$$a_r = \frac{v^2}{r}$$

וכיוונה כלפי מרכז המעגל.

זמן המחזור T הוא הזמן הדרוש על מנת להשלים סיבוב אחד שלם.

תדירות f הוא ההופכי של זמן המחזור והוא מייצג את מס' הסיבובים שהגוף עושה בשניה.

מהירות זויתית ω היא גודל הזווית θ שעבר הגוף בזמן t.

על כן, הקשר בין זמן המחזור T לבין המהירות הזויתית ω ניתן על ידי:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

הדרך שעושה גוף בזמן שהוא נע על פני זווית θ היא קשת שאורכה $R \cdot \theta$, ולכן הקשר בין גודל המהירות המשיקית vלגודל המהירות הזוויתית הוא:

$$v = \frac{R \cdot \theta}{t} = \frac{2\pi R}{T}$$

כיוון שגודל המהירות קבועה לכל משך תנועתה בחרנו לשם נוחות $\theta = 2\pi$ ובהתאם לכך $t = T$.
ומתוך נוסחאות אלו אפשר גם לראות כי מתקיים:

$$\begin{aligned} v &= \omega R \\ \theta &= 2\pi \frac{t}{T} = \omega t \end{aligned}$$

תנועה מעגלית שאינה קצובה

דוגמא לתנועה שאינה קצובה היא תנועת מטוטלת. באופן כללי, תנועה מעגלית אינה חייבת להיות על תנועה על פני מעגל שלם וסגור (בתנועה קצובה היא כן, מדוע?).
במקרה כזה אנחנו מפרידים בין 2 הרכיבים, הרדיאלי והמשיקי.

- כאשר **הרדיאלי** אחראי על שינוי בכיוון מהירות הגוף ומאפשר קיום תנועה מעגלית $a_r = \frac{v^2}{r}$.
- ואילו **המשיקי** אחראי על שינוי גודל המהירות $a_t = \frac{dv}{dt}$.

המהירות הזוויתית משתנה אף היא וניתנת על ידי:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

(שימו לב שביטוי זה עבור תנועה **קצובה** עדיין מתקיים, אם כי הוא קבוע).
בנוסף, תהיה לנו תאוצה זוויתית (בכיוון משיקי) הניתן על ידי:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

(עבור תנועה **קצובה** התאוצה הזוויתית שווה אפס).

שאלה 1_2500 - תאוצות במעגל

חלקיק נע במעגל בעל רדיוס R בתאוצה משיקית קבועה a_t ובלי מהירות התחלתית. מצאו את גודל התאוצה הרדיאלית:

א. כפונקציה של הזמן $a_r(t)$.

ב. כפונקציה של זווית הסיבוב $a_r(\theta)$.

פתרון

א. התנועה בציר המשיקי היא תנועה בתאוצה קבועה ולכן המהירות המשיקית היא:

$$v = v_0 + a_t t = a_t t$$

נציב בביטוי עבור התאוצה הרדיאלית ונקבל:

$$a_r = \frac{v^2}{R} = \frac{a_t^2 t^2}{R}$$

ב. הקשר בין מהירות זוויתית ω למהירות v היא:

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{a_t t}{R}$$

אבל מצד שני,

$$\begin{aligned}
\omega &= \frac{d\theta}{dt} \\
\theta(t) &= \int \frac{d\theta}{dt} dt = \int \frac{a_t}{R} t\, dt = \frac{a_t}{R}\frac{t^2}{2} \\
a_t &= \frac{2R\theta}{t^2} \\
a_r &= \frac{a_t^2 t^2}{R} = \left(\frac{2R\theta}{t^2}\right)^2 \frac{t^2}{R} = \frac{4R\theta^2}{t^2} = \frac{4R\theta^2}{2R\theta/a_t} = 2\theta a_t
\end{aligned}$$

שאלה 3113_1 - חוקי ניוטון

שני בלוקים מונחים צמוד אחד לשני על שולחן חסר חיכוך, כמו באיור. כח אופקי F מופעל על אחד הבלוקים. נתון כי:

$$\begin{aligned} F &= 3.2\,N \\ m_1 &= 2.3\,kg \\ m_2 &= 1.2\,kg \end{aligned}$$

א. מצא/י את הנורמל בין שני הבלוקים.

ב. הראה/י שאם אותו הכח פועל על m_2 אך בכיוון המנוגד, כח הנורמל המתקבל הוא $N = 2.1\,N$ שזה לא אותו הערך כמו בסעיף קודם. הסבר/י.

פתרון

א. בכיוון הציר האנכי, ציר $\hat{y}$, יש לנו את כח הכובד וכח הנורמל מהמשטח על כל אחד מהגופים בנפרד. כוחות אלו מאזנים אחד את השני ולכן הכח השקול בכיוון האנכי הוא אפס.
בכיוון הציר האופקי, ציר $\hat{x}$, יש תנועה ושני הגופים נעים יחדיו ולכן לשניהם אותה התאוצה. נרשום את משוואת הכח עבור כל אחד מהגופים בנפרד:

$$\begin{aligned} F + N_{21} &= m_1 a \\ N_{12} &= m_2 a \end{aligned}$$

מהחוק השלישי של ניוטון מתקיים $N_{12} = -N_{21} \equiv N$ (הכוחות הנורמליים שווים בגודלם והפוכים בכיוונם).

- N_{21} - כח הנורמל שמפעיל גוף 1 על גוף 2. פועל שמאלה ולכן מופיע עם סימן מינוס $-N$.
- N_{12} - כח הנורמל שמפעיל גוף 2 על גוף 1. פועל ימינה ולכן מופיע עם סימן פלוס $+N$.

$$\begin{aligned} a &= \frac{N_{12}}{m_2} = \frac{N}{m_2} \\ F - N &= m_1 a = \frac{m_1}{m_2} B = N \\ F &= \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) N \\ N &= \frac{F}{\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)} = \frac{3.2}{1 + \frac{2.3}{1.2}} \simeq 1.1\,N \end{aligned}$$

ב. לו הכח F כעת פועל שמאלה על גוף 2 משוואת הכוחות על כל אחד מהגופים תיראנה כעת כך:

$$\begin{aligned} N_{21} &= m_1 a \\ -F + N_{12} &= m_2 a \end{aligned}$$

מתוכן נקבל:

$$\begin{aligned} a &= \frac{N_{21}}{m_1} = -\frac{N}{m_1} \\ -F + N &= -\frac{m_2}{m_1} N \\ F &= \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) N \\ N &= \frac{F}{\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)} = \frac{3.2}{1 + \frac{1.2}{2.3}} \simeq 2.1\, N \end{aligned}$$