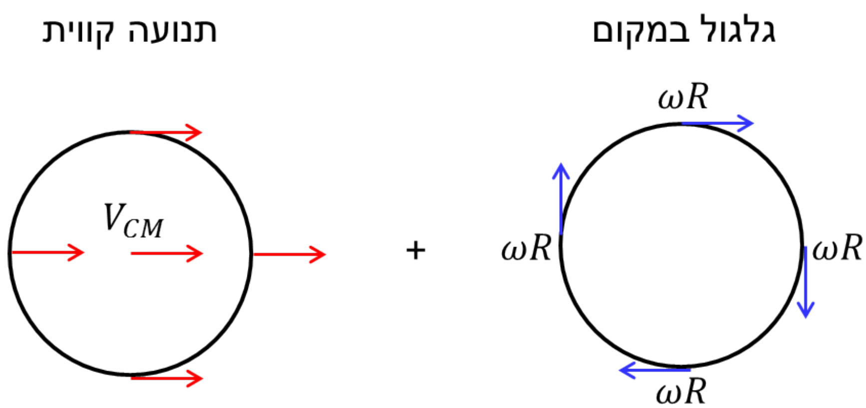
תרגול 12# - גלגול ללא החלקה

10 ביוני 2013

רקע תיאורטי

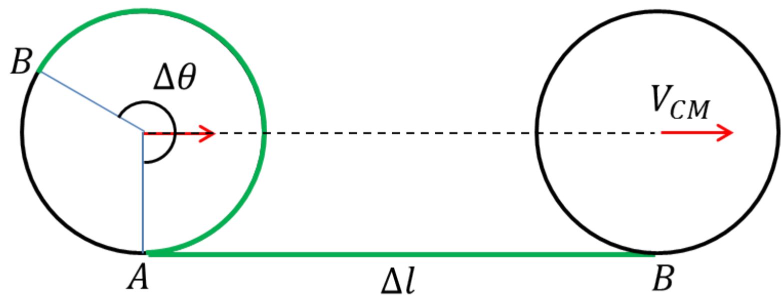
גלגול סביב ציר העובר דרך מרכז המסה

נפרק את התנועה לשני חלקים:

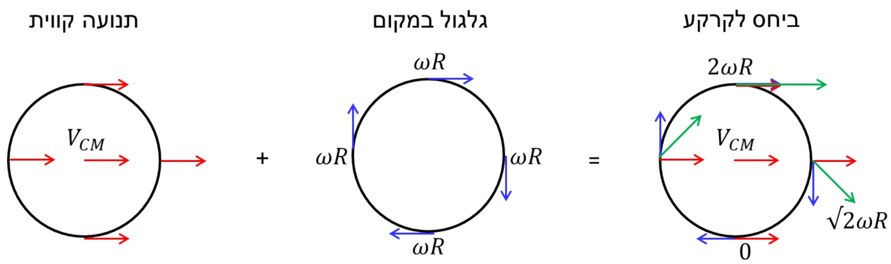


א. גלגול **ביחס** למרכז המסה (מרכז המסה נמצא במנוחה - גלגול במקום).
כל הנקודות על המעגל נעות באותה מהירות זוויתי ω. הנקודות על גבי שפת המעגל, אשר נמצאות במרחק R ממרכז המסה בעלות מהירות $v = \omega R$ בכיוון הסיבוב המשיק למעגל.

ב. תנועה קווית של מרכז המסה V_{CM}.
כיוון שמדובר בגלגול ללא החלקה, יש קשר בין גלגול בזווית $\Delta\theta$ לבין המרחק הקווי Δl שמרכז המסה R_{CM} עושה. **למעשה**, זהו המרחק הקווי **שכל** נקודה על גבי הגלגל עושה (במרחק R מהמרכז).



כדי לקבל את המהירות של כל הנקודות על גבי הגלגל **ביחס לקרקע**, עלינו לחבר וקטורית את המהירויות משני סוגי התנועה:



גלגול סביב ציר העובר דרך נקודת המגע בין הגלגל למשטח

לעיתים, נרצה לפתור את הבעיה ביחס לציר סיבוב אחר אשר לא עובר דרך מרכז המסה. נוכל לבחור את נקודת המגע בין הגלגל למשטח. מדוע שנבחר דווקא אותה? נקודה זו היא בעלת מהירות **אפס** ביחס למשטח. כיוון שכך, ציר הסיבוב במרווח זמן קטן Δt במנוחה ולכן כל שנותר לנו היא תנועה סיבובית סביב ציר סיבוב במרחק R ממרכז המסה. מומנט ההתמד של ציר זה הוא, לפי משפט שטיינר:

$$I = I_{CM} + MR^2$$

מתי נרצה לבחור את ציר הסיבוב כך? בהתאם לנתוני הבעיה ומה שמבקשים מאיתנו לפתור.

שאלה - תחרות גלגול החלקה

חישוק, דיסקה וכדור בעלי אותה מסה M ורדיוס R מתגלגלים מראש המדרון עם זווית נטיה $\alpha = 12^\circ$ ואורך $L = 2.5\,m$.

א. באיזה סדר יגיעו למטה?

ב. באיזו מהירות יגיעו?

פתרון

כדי שיהיו בעלי אותה מסה, צפיפותם שונה זו מזו. החישוק הוא הצפוף ביותר, אח"כ הדיסקה ולבסוף הכדור עם הצפיפות הנמוכה ביותר.
לגופים בזמן גלגול יש אנרגיה קינטית של מרכז המסה $\frac{1}{2}Mv_{CM}^2$, אנרגיה קינטית סיבובית $\frac{1}{2}I\omega^2$ ואנרגית גובה Mgh. כח החיכוך בנקודת המגע הוא סטטי (אין החלקה, מהירות הגוף בנקודת המגעה היא אפס ביחס למדרון) ולכן אין עבודה לא משמרת ויש שימור אנרגיה בכל רגע. נשווה בין האנרגיה הכוללת בהתחלה כאשר הגופים משוחררים ממנוחה ובסוף כשהגיעו לסוף המדרון:

$$MgL\sin\alpha = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

בגלגול, כאשר התנועה הסיבובית מקורה במומנט כח החיכוך, יש קשר בין מהירות מרכז המסה v_{CM} לבין המהירות הזוויתית $v_{CM} = \omega R$ ולכן יש קשר בין האנרגיה הקינטית הקווית לסיבובית:

$$\begin{aligned} MgL\sin\alpha &= \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I\frac{v_{CM}^2}{R^2} = \frac{1}{2}\left(M + \frac{I}{R^2}\right)v_{CM}^2 \\ v_{CM} &= \sqrt{\frac{2MgL\sin\alpha}{M + \frac{I}{R^2}}} \end{aligned}$$

כלומר, מהירות מרכז המסה של הגוף תלויה במומנט ההתמד I. ככל שהוא יותר גדול מהירות מרכז המסה הסופית יותר קטנה. מהירות מרכז המסה היא מה שקובעת כמה מהר הגוף ינוע מרחק L. נחשב את מומנט ההתמד של חישוק, דיסקה וכדור:

$$I = \int r^2 dm$$

עבור חישוק:

$$I_{hoop} = \int R^2 \lambda_{hoop} dl = \int_0^{2\pi} R^2 \frac{M}{2\pi R} R d\theta = \frac{MR^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta = MR^2$$

עבור דיסקה:

$$I_{disk} = \int r^2 \sigma_{disk} dS = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \frac{M}{\pi R^2} r d\theta dr = \frac{M}{\pi R^2}\int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{M}{\pi R^2}\left(\frac{R^4}{4}\right)(2\pi) = \frac{1}{2}MR^2$$

עבור כדור:

$$\begin{aligned}
I_{sphere} &= \int r_{\perp}^2 \rho_{sphere} dV = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (r\sin\theta)^2 \, \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} r d\theta r \sin\theta d\varphi dr = \\
&= \frac{3M}{4\pi R^3} \int_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^4 dr = \frac{3M}{4\pi R^3} \left(-\cos\theta\right)_0^{\pi} \left(\varphi\right)_0^{2\pi} \left(\frac{r^5}{5}\right)_0^R \\
\int_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta &= \int_0^{\pi} \sin^2\theta \sin\theta d\theta = \int_0^{\pi} \sin^2\theta \frac{-d\left(\cos\theta\right)}{d\theta} d\theta = -\int_0^{2\pi} \left(1-\cos^2\theta\right) d\left(\cos\theta\right) \\
&= \int_{-1}^{1} \left(1-t^2\right) dt = \left[t - \frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 1 - \frac{1}{3} - \left(-1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3} \\
I_{sphere} &= \frac{3M}{4\pi R^3} \left(\frac{4}{3}\right)_0^{\pi} (2\pi) \left(\frac{R^5}{5}\right) = \frac{2}{5} M R^2
\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו $I_{hoop} > I_{disk} > I_{sphere}$ ולכן מהירות מרכז המסה תהיה הכי גדולה עבור הכדור, אח"כ הדיסקה ולבסוף לחישוק תהיה מהירות מרכז מסה הנמוכה ביותר:

$$\begin{aligned}
v_{CM,hoop} &= \sqrt{\frac{2MgL\sin\alpha}{M + \frac{I_{hoop}}{R^2}}} = \sqrt{\frac{2gL\sin\alpha}{1+1}} = 2.25\, m/s \\
v_{CM,disk} &= \sqrt{\frac{2MgL\sin\alpha}{M + \frac{I_{disk}}{R^2}}} = \sqrt{\frac{2gL\sin\alpha}{1+\frac{1}{2}}} = 2.6\, m/s \\
v_{CM,sphere} &= \sqrt{\frac{2MgL\sin\alpha}{M + \frac{I_{sphere}}{R^2}}} = \sqrt{\frac{2gL\sin\alpha}{1+\frac{2}{5}}} = 2.7\, m/s
\end{aligned}$$

לפיכך, הכדור יגיע ראשון אחריו הדיסקה ולבסוף החישוק.