תרגול #1 ־ תנועה במימד אחד

13 במרץ 2013

רקע תיאורטי

מיקום כתלות בזמן $x(t)$

מהירות כתלות בזמן $v(t)=\frac{dx(t)}{dt}$ (כדי לקבל את $x(t)$ מ־$v(t)$ נבצע את הפעולה ההפוכה ־ אינטגרציה)

תאוצה כתלות בזמן $a(t)=\frac{dv(t)}{dt}=\frac{d^2x(t)}{dt^2}$ (כדי לקבל את $v(t)$ מ־$a(t)$ נבצע את הפעולה ההפוכה ־ אינטגרציה)

תנועה במהירות קבועה (קצובה):

$$
\begin{aligned}
x(t) &= x_0+v_0t\\
v(t) &= v_0
\end{aligned}
$$

תנועה בתאוצה קבועה (שוות תאוצה):

$$
\begin{aligned}
x(t) &= x_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2\\
v(t) &= v_0+at
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x &= x_0+\frac{1}{2}(v_0+v)t\\
x &= x_0+vt-\frac{1}{2}at^2\\
v^2 &= v_0^2+2a(x-x_0)
\end{aligned}
$$

מהירות ממוצעת

המהירות שהיתה לגוף לו היה נע במהירות **קבועה** העתק Δx (ולא דרך) בפרק זמן Δt:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$$

תאוצה ממוצעת

התאוצה שהיתה לגוף לו היה נע בתאוצה **קבועה** ומשנה את מהירותו Δvבפרק זמן Δt:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i}$$

תנועה יחסית

ראינו בתרגול כי מיקום של גוף תלוי בבחירת מערכת הצירים (היכן בחרנו את הראשית).
כאשר אנחנו רוצים לדבר על 2 גופים שונים (או יותר) A ו־B אשר כל אחד מהם מתואר על ידי מיקום x_A ו־ x_B ומהירויות $v_A = \dot{x_A}$ ו־ $v_B = \dot{x_B}$.
נוכל לבחור מערכת צירים "במנוחה" (מערכת מעבדה) כך שנתאר את מיקום 2 הגופים ביחס אליה. $x_{B/A} = x_B - x_A$ הם ביחס למערכת זו.
אולם, נוכל לבחור מערכת צירים אשר נעה במהירות של אחד הגופים.
מיקום גוף B ביחס לגוף A יהיה פשוט החסרה של שניהם באופן הבא:

$$x_{BA} = x_B - x_A$$

נוכל לגזור את המשוואה כדי לקבל את המהירות היחסית:

$$v_{BA} = v_B - v_A$$

והתאוצה היחסית:

$$a_{B/A} = a_B - a_A$$

לדוגמא (בדיקה): אם $v_A = v_B$ אזי המהירות היחסית ביניהם מתאפסת (נראים במנוחה אחד ביחס לשני) $v_{BA} = 0$ וכן גם התאוצה היחסית ביניהן.

שאלה 1_2104 - זריקה אנכית

גוף נזרק כלפי מעלה במהירות של 30 מטר לשניה.

א. היכן ימצא הגוף לאחר 2 שניות?

ב. מה תהיה מהירותו לאחר 3 שניות?

ג. כמה זמן תימשך עלייתו?

ד. מה הגובה המקסימלי במסלולו?

ה. באיזו מהירות יגיע לנקודת הזריקה?

ו. לאחר כמה זמן הגוף יהיה 10 מטר מתחת לנקודת הזריקה?

פתרון

הגוף נופל נפילה חופשית והוא נע בתאוצה קבועה $g=-9.8\,m/s^2$ (הסימן מינוס מעיד על בחירת מערכת צירים כזו כך ש-$\hat{y}$הוא כלפי מעלה והתאוצה היא בכיוון $-\hat{y}$.

משוואות המיקום והמהירות כפונקציה של הזמן בתאוצה קבועה הן:

$$\begin{aligned} y &= y_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2 \\ v &= v_0+at \end{aligned}$$

בשאלה שלנו נבחר את הראשית להיות הגובה ממנה נזרק הגוף ולכן:

$$\begin{aligned} y_0 &= 0 \\ v_0 &= 30\,m/s \\ a=g &= -9.8\,m/s^2 \end{aligned}$$

א. משוואת המיקום היא: $y=30t-4.9t^2$. נציב ונקבל

$$y\left(t=2\,s\right)=30\cdot 2-4.9\cdot 4=40.4\,m$$

ב. משוואת המהירות היא: $v=30-9.8t$. נציב ונקבל

$$v\left(t=3\,s\right)=30-29.4=0.6\,m/s$$

ג. כאשר הגוף עולה מהירותו הולכת וקטנה כיוון שהתאוצה מנוגדת לכיוון מהירותו. הגוף יעלה עד אשר מהירותו תתאפס, ולכן:

$$\begin{aligned} 0 &= 30-9.8\cdot t_{up} \\ t_{up} &= 3.06\,s \end{aligned}$$

ד. הגובה המקסימלי ינתן עבור זמן t_{up}שחושב בסעיף קודם:

$$y_{max}=y\left(t_{up}\right)=30\cdot 3.06-4.9\left(3.06\right)^2\simeq 45.92\,m$$

ה. נקודת הזריקה נבחרה להיות הראשית ולכן:

$$0 = 30t-4.9t^2=-4.9t\left(t-6.12\right)$$

פתרונות המשוואה: $t=6.12\,s$, $t=0$.

התוצאה הראשונה מתאימה עבור רגע הזריקה והתוצאה השניה מתאימה כאשר תנועת הגוף היא כלפי מטה. נשים לב כי תוצאה זו כפולה מ-t_{up}שהתקבל בסעיף קודם. נציב את התוצאה השניה במשוואת המיקום:

$$v=30-9.8\cdot 6.12\simeq -30\,m/s$$

ו. נציב במשוואת המיקום:

$$\begin{aligned} -10 &= 30t-4.9t^2 \\ 4.9t^2-30t-10 &= 0 \end{aligned}$$

קיבלנו משוואה ריבועית מהצורה $at^2+bt+c=0$.

נשתמש בנוסחה $t_{\pm}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ למציאת פתרונות המשוואה הריבועית ונקבל:

$$\begin{aligned} t_+ &= 6.44\,s \\ t_- &= -0.32\,s \end{aligned}$$

כמובן שזמן שלילי אינו מהווה פתרון פיסיקלי כיוון שתנועת הגוף החלה בזמן $t=0$ ולכן t_+ הוא הפתרון הנכון.

שאלה 1_2301 - תנועת מכונית

נתונה משוואת המהירות הבאה, המתארת תנועת מכונית על קו ישר:

$$v\left(t\right)=3\left[\frac{m}{s^2}\right]t+5\left[\frac{m}{s^4}\right]t^3$$

א. מצא/י את התאוצה והמיקום של המכונית כפונקציה של הזמן. כמו כן, ידוע שבזמן $t=3\,s$ מיקום המכונית היה $x\left(t=3\,s\right)=15\,m$.

ב. מצא/י את המהירות הממוצעת במהלך 10 השניות הראשונות של התנועה.

ג. מצא/י את התאוצה הממוצעת בפרק הזמן $10<t<20$ שניות.

ד. מצא/י מהירות רגעית בזמן $t=50\,s$.

פתרון

א. הקשר בין תאוצה למהירות:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(3t + 5t^3\right) = 3 + 15t^2$$

הקשר בין מיקום למהירות:

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad x = \int v\,dt = \int \left(3t + 5t^3\right)dt = \frac{3}{2}t^2 + \frac{5}{4}t^4 + x_0$$

כאשר x_0 הוא קבוע אינטגרציה. נוכל למצוא אותו בעזרת:

$$\begin{aligned} x\left(t = 3\,s\right) &= 15 + 13.5 + 101.25 + x_0 = 15 \\ x_0 &= -99.75\,m \\ \Rightarrow x &= \frac{3}{2}t^2 + \frac{5}{4}t^4 - 99.75 \end{aligned}$$

ב. המהירות הממוצעת ניתנת על ידי היחס בין הפרש המהירויות (בפרק הזמן המדובר) לבין הפרש הזמנים.

$$\bar{v} = \frac{\triangle x}{\triangle t} = \frac{x_{10} - x_0}{10 - 0} = \frac{12,650}{10} = 1,265\,m/s$$

כדאי לשים לב שזו אינה מהירות ריאלית למכונית.

ג. התאוצה הממוצעת ניתנת על ידי היחס בין התאוצות (בפרק הזמן המדובר) לבין הפרש הזמנים.

$$\bar{a} = \frac{\triangle v}{\triangle t} = \frac{v_{20} - v_{10}}{20 - 10} = \frac{40,060 - 5,030}{10} = 3,503\,m/s^2$$

ד. המהירות הרגעית בזמן $t = 50\,s$ ניתנת על ידי הצבה במשוואת המהירות:

$$v\left(t = 50\,s\right) = 3 \cdot 50 + 5 \cdot 50^3 = 625,150\,m/s$$