1

תרגול 9 - מומנט התמד ומומנט כוח

מומנט התמד:

עבור מערכת חלקיקים, ביחס לציר סיבוב

$$I=\sum_i m_i r_i^2$$

m_i – מסה של חלקיק i

r_i – מרחק אנכי של חלקיק i מציר הסיבוב

משפט הצירים המקבילים (משפט שטיינר):

$$I = I_{cm} + Mh^2$$

I – מומנט התמד סביב ציר מסוים

I_{cm} – מומנט התמד סביב ציר מקביל שעובר במרכז המסה

M – מסת הגוף

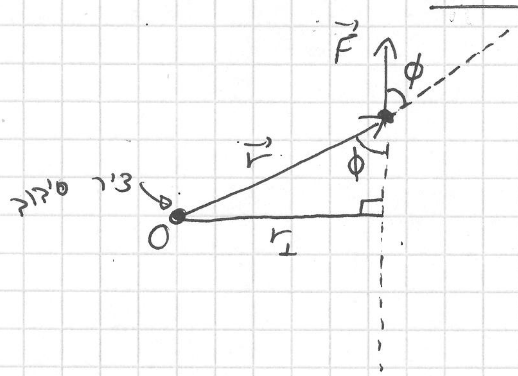
h – מרחק אנכי בין הצירים

מומנט כוח:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\downarrow$$

$$\tau = rF\sin\phi$$
$$= r_\perp F$$



* לרוב, לא נידרש לעבודה וקטורית עם $\vec{\tau}$ ונוכל להסתפק לגודל (המוחלט) שלו. סימן חיובי אם הוא יגרום לסיבוב נגד כיוון השעון, וסימן שלילי עבור סיבוב עם כיוון השעון.

חוק שני של ניוטון עבור סיבובים:

$$\sum \tau = I\alpha$$

$\sum \tau$ – מומנט כוח שקול

I – סביב ציר הסיבוב

α – סביב אותו ציר סיבוב

(עבור סיבובים במישור xy)

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

α – תאוצה זוויתית

סמפור

הכוחות הפועלים על הקורה הם הכובד, והציר. מכיוון שאיננו יודעים איזה כוח מפעיל הציר, נשתמש במשוואות החוק השני לתנועה מעגלית, סביב ציר שנמצא בנקודת הציר. מכיוון שהמרחק בין הציר שבחרנו לנקודה שבה פועל כוח הציר הוא 0, הוא לא מפעיל מומנט. המומנט היחיד הוא של הכובד, שפועל כמובן ממרכז המסה. נחשב את התאוצה הזוויתית:

$$\sum \tau = mg\frac{L}{2}\cos\theta = I\alpha$$

נעביר אגף לקבלת:

$$\alpha = \frac{mgL\cos\theta}{2I}$$

נתנו לנו את מומנט ההתמד של הקורה יחסית לציר , $I = \frac{1}{3}mL^2$. נציב את זה:

$$\alpha = \frac{mgL\cos\theta}{2\cdot\frac{1}{3}mL^2} = \frac{3g\cos\theta}{2L}$$

וכך יש לנו ביטוי לתאוצה הזוויתית. ביקשו את התאוצה הקווית של שתי נקודות. נקודה B שנמצאת במרחק:

$$r_B = 0.4m = \frac{0.4m\cdot 0.5m}{0.5m} = 0.8L$$

ונקודה A שנמצאת במרחק:

$$r_A = 0.15m = \frac{0.15m\cdot 0.5m}{0.5m} = 0.3L$$

כדי למצוא את התאוצה הזוויתית של שתי הנקודות פשוט נציב בקשר $a = \alpha r$:

$$a_A = \alpha r_A = \frac{3g\cos\theta}{2L}0.3L = 0.45g\cos\theta$$
$$a_B = \alpha r_B = \frac{3g\cos\theta}{2L}0.8L = 1.2g\cos\theta$$

ביקשו גם באופן ספציפי כשהזווית היא $\theta = 50$. נציב:

$$a_A = 0.45g\cos\theta \approx 0.29g \approx 2.9\frac{m}{s^2}$$
$$a_B = 1.2g\cos\theta \approx 0.77g \approx 7.7\frac{m}{s^2}$$

Solution – The Seven Coins:

The moment of inertia is additive, hence we need to calculate the moment of inertia separately for each coin (around the required axis) and simply add.

Starting with the central coin:

$$I_{central} = \int r_{\perp}^2 dm = \left\{ \sigma = \frac{m}{\pi R^2} \right\} = \sigma \int_0^R r^2 r dr \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{2} m R^2$$

And then, using the perpendicular axes theorem for the other coins:

$$I_{outer} = \frac{1}{2} m R^2 + m(2R)^2$$

So finally-

$$I_{tot} = I_{central} + 6 I_{outer} = \frac{7}{2} m R^2 + 6m(2R)^2 = \boxed{\frac{55}{2} m R^2}$$