תרגול 2: תנועה במימד אחד

העתק: $\Delta x = x_2 - x_1\ [m]$

מהירות ממוצעת: $v_{avg} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \left[\frac{m}{s}\right]$

x_1- מיקום בזמן t_1, x_2- מיקום בזמן t_2.

מהירות רגעית (או פשוט מהירות):

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

נגזרת של x לפי t. $x = x(t) \rightarrow v = v(t)$.

תאוצה:

$$a = \frac{dv}{dt}\left[\frac{m}{s^2}\right], \ \ a = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

<u>תנועה בתאוצה קבועה:</u> $a = const$

$$v(t) = v_0 + at$$

v_0 – מהירות בזמן $t = 0$.

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

x_0 – מיקום בזמן $t = 0$.

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

שאלה 1 <1_1103>

נתון חוט באורך l ומסה m ותאוצת הכוכב g.

המימדים הנתונים

$$[l] = L, \ \ [m] = M, \ \ [g] = \frac{L}{T^2}$$

זמן המחזור τ יהיה מכפה של הגדלים הנתונים בחזקות שונות.

$$\tau \propto l^a m^b g^c$$

נוכל לקבוע את החזקות הללו על סמך היחידות.

$$L^a M^b \left(\frac{L}{T^2}\right)^c = T^1$$

כלומר

$$L^{a+c} M^b T^{-2c} = L^0 M^0 T^1$$

קיבלנו 3 משוואות בשלושה נעלמים:

$$a + c = 0$$

$$b = 0$$

$$-2c = 1$$

נפתור את המשוואות כדי לקבל $a = \frac{1}{2}, b = 0, c = -\frac{1}{2}$

כלומר שזמן המחזור תלוי בנתונים בצורה הבאה

$$\tau \propto l^{\frac{1}{2}} m^0 g^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{l}{g}}$$

ואינו תלוי במסה.

<u>שאלה 2 <1_2111></u>

מיקום החלקיק על ציר z נתון לפי $z(t) = \alpha t e^{-\beta t}$.

א. כלל חשוב: בפונקציה אקספוננציאלית, טריגונומטרית ולוגריתמית, הארגומנט חייב להיות חסר יחידות.

לכן

$$[\beta t] = 1 \rightarrow [\beta] = \frac{1}{s}$$

ל $z(t)$ יש יחיד של מרחק, לכן

$$[z(t)] = [\alpha t] = m \rightarrow [\alpha] = \frac{m}{s}$$

ב. חלקיק עוצר , משמעותו מהירות אפס.

$$v(t) = \left(\frac{dz(t)}{dt}\right)_{t=t_s} = 0 = \alpha e^{-\beta t_s} - \alpha\beta t_s e^{-\beta t_s}$$

$$\alpha e^{-\beta t_s} = \alpha\beta t_s e^{-\beta t_s}$$

$$t_s = \frac{1}{\beta}$$

ג.

$$z(t_s) = \alpha t_s e_s^{-\beta t_s} = \frac{\alpha}{\beta} e^{-1}$$

קיים פתרון נוסף עבור $t \rightarrow \infty$.

גרף של רץ באימון

א. מהירות היא נגזרת של המיקום. לכן, המרחק הוא האינטגרל על המהירות:

$$x = \int v dt$$

אינטגרל שווה לשטח שמתחת לגרף, ולכן נוכל למצוא את המרחק שעבר הרץ בעזרת חישוב השטח הגיאומטרי מתחת לגרף. יש לנו משולש, טרפז ושני מרובעים. השטח הוא:

$$x = \frac{1}{2}2s \cdot 8\frac{m}{s} + 8s \cdot 8\frac{m}{s} + 2s \cdot \frac{8+4}{2}\frac{m}{s} + 4s \cdot 4\frac{m}{s} = 100m$$

ב. יש ארבעה חלקים, כאשר בכל אחד מהם המהירות בקו ישר, ולכן הנגזרת קבועה. בחלק הראשון התאוצה חיובית, בשלישי שלילית, ובשני וברביעי התאוצה 0. התאוצות הן לפי השיפוע:

$$a(t) = \begin{cases} \frac{8\frac{m}{s}-0}{2s-0} = 4\frac{m}{s^2} & 0 \le t < 2 \\ 0 & 2 \le t < 10 \\ \frac{4\frac{m}{s}-8\frac{m}{s}}{12s-10s} = -2\frac{m}{s^2} & 10 \le t < 12 \\ 0 & 12 \le t < 16 \end{cases}$$

עכשיו יש למצוא את נוסחת המיקום לכל קטע. הקטע הראשון מתחיל במהירות אפס, ומיקום אפס, ולכן פונקצית המיקום היא פשוט:

$$x(t) = \frac{4\frac{m}{s^2}t^2}{2} \qquad 0 \le t < 2$$

בחלק השני, יש תנועה במהירות קבועה, שידועה מהגרף ולכן:

$$x(t) = c_1 + \left(8\frac{m}{s}\right)t \qquad 2 \le t < 10$$

את הקבוע נמצא על ידי הצבת הקצה $t = 2s$, בשתי המשוואות, לפני הנקודה ואחריה:

$$\frac{4\frac{m}{s^2}(2s)^2}{2} = c_1 + \left(8\frac{m}{s}\right)(2s)$$
$$c_1 = 8m - 16m = -8m$$

$$x(t) = 8\frac{m}{s}t - 8m \qquad 2 \le t < 10$$

בחלק השלישי, התנועה בתאוצה קבועה, ויש שני קבועים:

$$x(t) = c_2 + c_3 t - \frac{2\frac{m}{s^2}}{2}t^2 \qquad 10 \le t < 12$$

נמצא אותם על ידי שתי השוואות, של המיקום ושל המהירות (נגזרת המיקום), בנקודה $t = 10s$.

$$c_3 - 2\frac{m}{s^2}(10s) = 8\frac{m}{s}$$
$$c_3 = 28\frac{m}{s}$$
$$c_2 + 28\frac{m}{s}(10s) - \frac{2\frac{m}{s^2}}{2}(10s)^2 = 8\frac{m}{s}(10s) - 8m$$
$$c_2 = -108m$$

$$x(t) = -1\frac{m}{s^2}t^2 + 28\frac{m}{s}t - 108m \qquad 10 \leq t < 12$$

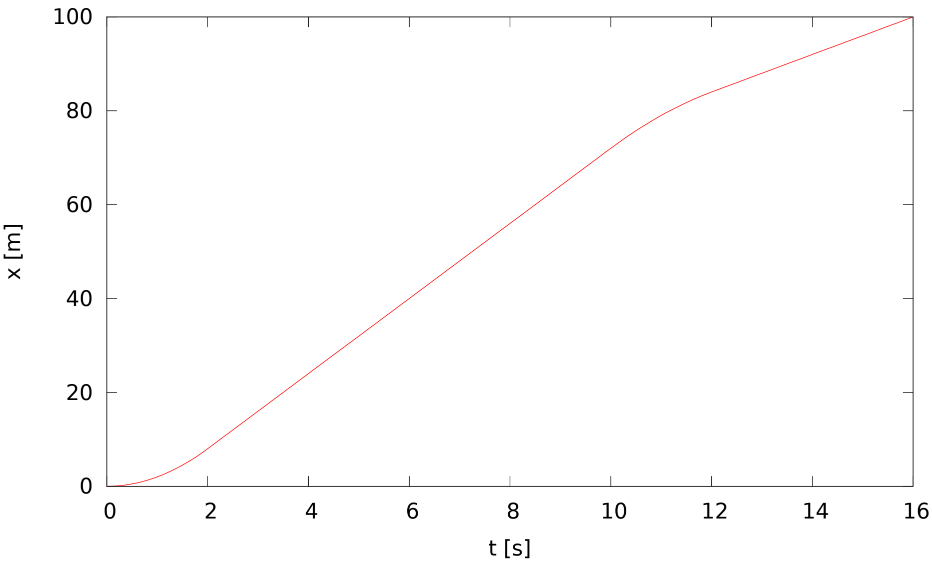
בחלק הרביעי ואחרון (סוף סוף), שוב המהירות קבועה וידועה מהגרף, ויש קבוע אחד. אני סומך עליכם שתדעו איך מוצאים אותו.

$$x(t) = 4\frac{m}{s}t + 36m \qquad 12 \leq t < 16$$

לסיכום:

$$x(t) = \begin{cases} x(t) = \frac{4\frac{m}{s^2}t^2}{2} & 0 \leq t < 2 \\ x(t) = 8\frac{m}{s}t - 8m & 2 \leq t < 10 \\ x(t) = -1\frac{m}{s^2}t^2 + 28\frac{m}{s}t - 108m & 10 \leq t < 12 \\ x(t) = 4\frac{m}{s}t + 36m & 12 \leq t < 16 \end{cases}$$

והגרף:



ג. הדרך הפשוטה למהירות ממוצעת היא המרחק הכולל חלקי הזמן. את המרחק בזמן $t = 10s$, נוכל למצוא מהצבה במשוואות שמצאנו:

$$x(t = 10s) = 8\frac{m}{s}(10s) - 8m = 72m$$

ולכן המהירות הממוצעת:

$$\overline{v} = \frac{x(t = 10s) - x(t = 0)}{10s} = 7.2\frac{m}{s}$$

ד. התאוצה: