

## תרגול 11

תרגיל 1 <4101>

1. נחפש את עבודת כוח הכובד כפונקציה של  $\theta$ . אם ניצור תרשים כוחות ונבחר מערכת צירים רדיאלית ומשיקית, החלק הרדיאלי מאונך לכיוון התנועה בכל נקודה, לכן רכיב כוח הכובד שמבצע תנועה הוא הרכיב המשיקי

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int mg \sin \theta' R d\theta' = mgR \int_0^\theta \sin \theta' d\theta' = mgR(1 - \cos \theta)$$

2. אם המהירות ההתחלתית היא 0,

$$W = K_f - K_i = K_f = mgR(1 - \cos \theta)$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgR(1 - \cos \theta)$$

3.

$$v_{\parallel}^2 = 2gR(1 - \cos \theta)$$

התאוצה הרדיאלית

$$a_r = \frac{v_t^2}{R} = 2g(1 - \cos \theta)$$

והמשיקית

$$a_{\parallel} = \frac{dv_{\parallel}}{dt} = \frac{dv_{\parallel}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dv_{\parallel}}{d\theta} \omega = \frac{dv_{\parallel}}{d\theta} \frac{v_{\parallel}}{R} = \frac{d}{d\theta} (2gR(1 - \cos \theta))^{\frac{1}{2}} \frac{1}{R} v_{\parallel} =$$

$$\frac{1}{2} (2gR(1 - \cos \theta))^{-\frac{1}{2}} 2gR \sin \theta \frac{1}{R} (2gR(1 - \cos \theta))^{\frac{1}{2}} = g \sin \theta$$

אפשר לקבל את התוצאה גם משיקולי כוחות.

4. נכתוב את משוואת כוחות רדיאלית

$$\sum F_{\perp} = mg \cos \theta - N = ma_{\perp} = m \frac{v_{\parallel}^2}{R}$$

$$N = mg \cos \theta - \frac{mv_{\parallel}^2}{R} = m \left( g \cos \theta - \frac{v_{\parallel}^2}{R} \right)$$

הגוף מתנתק כאשר  $N = 0$  כלומר

$$m \left( g \cos \theta - \frac{v_{\parallel}^2}{R} \right) = 0 \rightarrow \cos \theta = \frac{v_{\parallel}^2}{gR}$$

נציב את המהירות שקיבלנו

$$\cos \theta = \frac{2gR(1 - \cos \theta)}{gR} = 2 - 2 \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{2}{3}$$

אילו היה חיכוך, המהירות עבור אותה זווית  $\theta$  הייתה משתנה. אינטואיטיבית, היא אמורה להיות קטנה יותר באותה זווית. האנרגיה הקינטית של המערכת קטנה עבור אותה זווית, כלומר

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgR(1 - \cos \theta) - W_f \rightarrow v^2 = 2gR(1 - \cos \theta) - \frac{2W_f}{m}$$

בציר הרדיאלי, סכום הכוחות הוא נשאר זהה עם ובלי החיכוך, לכן המשוואה שקיבלנו עבור תנאי ההתנתקות נשאר זהה

$$\cos \theta = \frac{v_{\parallel}^2}{gR}$$

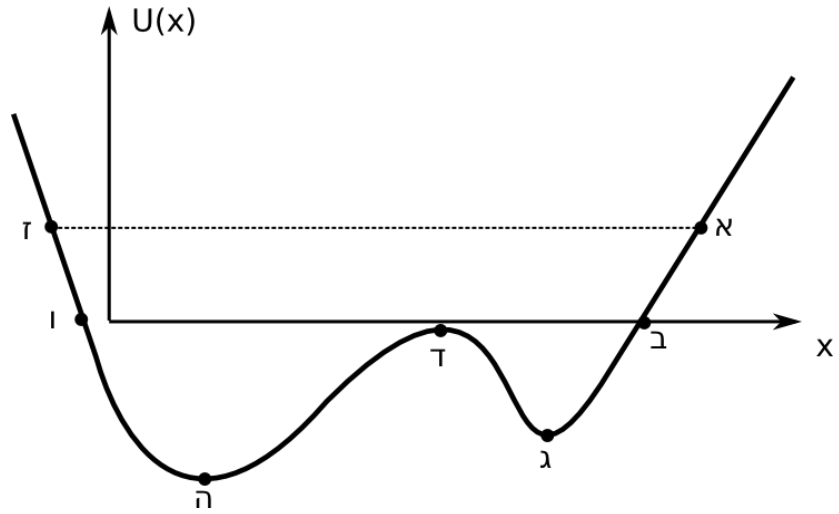
ונקבל

$$\cos \theta = \frac{2gR(1 - \cos \theta)}{gR} - \frac{2W_f}{mgR} = 2 - 2 \cos \theta - \frac{2W_f}{mgR}$$

ולכן הזווית

$$\cos \theta = \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{W_f}{mgR} \right)$$

כלומר שבלי חיכוך  $\cos \theta$  היה גדול יותר, ואנחנו יודעים שעבור  $0^\circ < \theta < 90^\circ$  ככל ש  $\cos \theta$  גדול יותר, הזווית היא קטנה יותר, לכן עבור משטח בלי חיכוך, הגוף היה מתנתק בזווית קטנה יותר.



נתון כי האנרגיה הכוללת של הגוף היא הקו המקווקו.

$$E = K + U(x)$$

באופן כללי אנרגיית הגוף היא

- א. המהירות מתאפסת כאשר האנרגיה הקינטית מתאפסת וזה קורה כאשר כל האנרגיה של הגוף היא אנרגיה פוטנציאלית, כלומר בנקודות א' וז'.
- ב. מהירות הגוף היא מקסימלית כאשר האנרגיה הפוטנציאלית היא מינימלית, וזה קורה בנקודה ה'.
- ג. לפי ההגדרה  $F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$ , לכן כאשר נגזרת האנרגיה הפוטנציאלית מתאפסת, גם הכוח מתאפס, וזה קורה בנקודות ג', ד' וה'.  
 ד. לפי ההגדרה  $F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$ , כיוון הכוח הוא בניגוד לכיוון הנגזרת, כלומר כאשר שיפוע הגרף הוא שלילי הכוח פועל ימינה וכאשר הוא חיובי, הכוח יפעל שמאלה. לכן בין א' לג' הכוח הוא שמאלה, בין ג' לד' הוא ימינה, בין ד' לה' הוא שוב שמאלה, ובין ה' לז' הוא ימינה.
- ה. מסלול לא קשור הוא מסלול בו הגוף יכול לברוח לאין סוף או למינוס אין סוף. במקרה הזה אין אפשרות כזו, לכן זהו מסלול קשור.

תרגיל 3 <1 3401>

א. נעבוד במערכת המעבדה (האינרציאלית) בסעיף זה. הכיוונים שנבחר עבור כל המסות הם: x ימינה וy כלפי מעלה

משוואות הכוחות על המסות:

מסה M:

$$F - N_2 - T_1 = Ma$$

$$N_g - Mg - N_1 - T_2 = 0$$

מסה  $m_1$ :

$$T_1 = m_1 a$$

$$N_1 - m_1 g = 0$$

מסה  $m_2$ :

$$N_2 = m_2 a$$

$$T_2 - m_2 g = 0$$

אם נחבר את המשוואות בציר x נקבל

$$F = (M + m_1 + m_2)a$$

כעת הנעלם היחיד שחסר הוא a ונקבל אותו מחלוקה שך משוואות 3 במשוואה 6, כאשר אנחנו יודע שהמתיחויות שוות

$$\frac{m_1 a}{m_2 g} = 1 \rightarrow a = \frac{m_2 g}{m_1}$$

$$F = \frac{(M+m_1+m_2)m_2 g}{m_1}$$

כלומר שהכוח שצריך להפעיל הוא

ב. כעת יש תנועה יחסית בין המסות לבין העגלה.  $F' = \frac{2m_2 g(M+m_1+m_2)}{m_1}$  נשתמש במערכת לא

אינרציאלית שנעה עם העגלה בתאוצה a ונסמן את התאוצה היחסית ב  $\tilde{a}$   
מסה M:

$$F' - N_2 - T - Ma = 0$$

$$N_g - Mg - N_1 - T = 0$$

מסה  $m_1$ :

$$T - m_1 a = m_1 \tilde{a}$$

$$N_1 - m_1 g = 0$$

מסה  $m_2$ :

$$N_2 - m_2 a = 0$$

$$T - m_2 g = -m_2 \tilde{a}$$

נחבר שוב את שלוש המשוואות בציר x

$$F' - (M + m_1 + m_2)a = m_1 \tilde{a}$$

מתוך המשוואות 3 ו6 נקבל

$$m_2 g - m_1 a = (m_1 + m_2) \tilde{a} \rightarrow a = \frac{m_2 g - (m_1 + m_2) \tilde{a}}{m_1}$$

ולכן

$$F' - (M + m_1 + m_2) \frac{m_2 g - (m_1 + m_2) \tilde{a}}{m_1} = m_1 \tilde{a}$$

נציב את  $F'$  ונבודד

$$\frac{2m_2 g (M + m_1 + m_2)}{m_1} - (M + m_1 + m_2) \frac{m_2 g - (m_1 + m_2) \tilde{a}}{m_1} = m_1 \tilde{a}$$

$$\left( m_1 - \frac{m_1 + m_2}{m_1} (M + m_1 + m_2) \right) \tilde{a} = \frac{m_2 g (M + m_1 + m_2)}{m_1}$$

$$\mu = \frac{m_1}{m_2} (M + m_1 + m_2) \text{ נגדיר}$$

$$(m_1 - (M + m_1 + m_2) - \mu) \tilde{a} = \mu g$$

$$\tilde{a} = \frac{\mu g}{-M - m_2 - \mu} = -\frac{\mu g}{\mu + M + m_2}$$

## תרגיל 4 <1 4102>

א. עם מהירות התחלתית  $v_0$ , המרחק שהגוף יעלה יסומן ב- $x$ .  
העבודה שהחיכוך עושה שווה להפרש האנרגיות המכניות.  
כוח החיכוך:

$$f_k = \mu N = \mu mg \cos \theta$$

עבודת כוח החיכוך

$$W_{f_k} = f_k x = -\mu mg \cos \theta x$$

נבחר את מישור הייחוס בתחתית המדרון, כך שבתחתית יש אנרגיה קינטית בלבד.

$$E_i = \frac{1}{2} m v_0^2$$

ובסוף התנועה יש רק אנרגיה פוטנציאלית

$$E_f = mgh = mgx \sin \theta$$

לכן

$$-\mu mg \cos \theta x = mg \sin \theta x - \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$x = \frac{v_0^2}{2g(\sin \theta + \mu \cos \theta)}$$

ב. כאשר הגוף יורד, העבודה שהחיכוך יעשה תהיה זהה לזו שהוא עשה בעלייה (כוח החיכוך והמסלול הם בכיוונים הפוכים), והפרש האנרגיות המכניות הוא

$$W_{f_k} = \frac{1}{2} m v_1^2 - mgx \sin \theta$$

$$-\mu mg \cos \theta x = \frac{1}{2} m v_1^2 - mgx \sin \theta$$

$$v_1^2 = 2gx(\sin \theta - \mu \cos \theta) = v_0^2 \frac{\sin \theta - \mu \cos \theta}{\sin \theta + \mu \cos \theta}$$

$$\frac{v_0}{v_1} = \sqrt{\frac{\sin \theta + \mu \cos \theta}{\sin \theta - \mu \cos \theta}} = \sqrt{\frac{\tan \theta + \mu}{\tan \theta - \mu}}$$

ג. עבור  $\tan \theta < \mu$  נקבל ביטוי שלילי במכנה של השורש וסה"כ ביטוי שלילי בתוך השורש.  
המשמעות היא שהתוצאה היא לא פיזיקלית.

ההסבר לכך הוא שהחיכוך גדול מדי ולכן הגוף ייעצר לפני שהוא יגיע לתחתית.