תרגול 10 – עבודה, אנרגיה קינטית ופוטנציאלית ושימור אנרגיה

אנרגיה קינטית:

$$K \equiv \frac{1}{2}mv^2$$

כאשר K הוא האנרגיה הקינטית של הגוף, m היא מסת הגוף וv היא מהירותו.

היחידות של האנרגיה הקינטית בSI נקראות ג'אול, ואפשר לכתוב אותן באמצעות היחידות הבסיסיות

$$1[J] = 1\left[kg\frac{m^2}{s^2}\right]$$

עבודה:

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y dy + \int_{z_1}^{z_2} F_z dz$$

והיחידות של עבודה הן

$$1[N \cdot m] = 1[J]$$

כאשר פירקנו את הכוח לרכיבים לפי צירים ובהתאם את המיקום ההתחלתי $\vec{r}_1$ והמיקום הסופי $\vec{r}_2$.

משפט עבודה אנרגיה קינטית:

$$W = K_f - K_i$$

העבודה הכוללת היא סכום העבודות שנעשו ע"י כל אחד מהכוחות.

הספק

$$P = \frac{dW}{dt}$$

והיחידות של הספק הן ואט:

$$1[W] = 1[\frac{J}{s}]$$

חוק הוק

קפיץ, כאשר מכווצים או מותחים אותו, מפעיל כוח

$$F = -k\Delta x$$

כאשר k הוא קבוע הקפיץ, וΔx הוא ההעתק של הקצה החופשי של הקפיץ ממיקומו כאשר הוא רפוי.

כוח משמר:

כוח שהעבודה שהוא מבצע על חלקיק שנע במסלול סגור היא אפס.

הגדרה שקולה – העבודה שהכוח מבצע לא תלויה במסלול.

דוגמאות לכוחות משמרים: כובד, קפיץ.

דוגמא לכוח לא משמר: חיכוך.

אנרגיה פוטנציאלית:

$$\Delta U = -W_{\text{משמרים}}$$

השינוי באנרגיה הפוטנציאלית שווה לעבודת הכוחות המשמרים.

דוגמאות: אנרגיה פוטנציאלית כובדית: (עבור תנאי התחלה $y_0 = 0$, $U_0 = 0$)

$$U(y) = mgy$$

אלסטית (קפיץ): (עבור תנאי התחלה $x_0 = 0$, $U_0 = 0$)

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

מדוע מותר לנו לבחור את U_0 ? משום שמה שמעניין אותנו זה תמיד הפרש האנרגיות (העבודה מוגדרת כהפרש האנרגיות), לכן מותר לנו תמיד לבחור את אנרגיית הייחוס, כלומר להגדיר את האפס של האנרגיה.

אנרגיה מכנית:

$$E = K + U$$

$$[E] = J$$

נשים לב שלפי משפט עבודה אנרגיה קינטית

$$K_f - K_i = W_{tot} = W_{\text{משמרים}} + W_{\text{לא משמרים}}$$

אם נכניס את הגדרת האנרגיה הפוטנציאלית נקבל

$$K_f - K_i = -\left(U_f - U_i\right) + W_{\text{לא משמרים}}$$

כלומר

$$K_f + U_f - K_i - U_i = E_f - E_i = W_{\text{לא משמרים}}$$

זהו משפט עבודה אנרגיה מכנית

שימור אנרגיה:

במערכת מבודדת (כלומר ללא כוחות חיצוניים), אם רק כוחות משמרים מבצעים עבודה, אזי האנרגיה נשמרת

$$K_f + U_f - K_i - U_i = 0$$

$$K_f + U_f = K_i + U_i$$

הקשר בין האנרגיה פוטנציאלית והכוח

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$$

או

$$U(x) = -\int F(x)dx$$

ואפשר לראות גם מההגדרה הזו שתמיד ניתן להוסיף קבוע לאנרגיה.

תרגיל 1 <3310 1>

א. הכוח תלוי במהירות, כך שנקבל משוואת כוחות

$$\sum F = mg - m\gamma v = ma = m\frac{dv}{dt}$$

נפתור את המשוואה

$$g - \gamma v = \frac{dv}{dt}$$

נבודד את v מצד אחד ואת הזמן מצד שני

$$\frac{dv}{g - \gamma v} = dt \to t = -\frac{1}{\gamma}\ln(g - \gamma v) + const$$

$$\ln(g - \gamma v) = -\gamma t + const$$

$$g - \gamma v = c \cdot e^{-\gamma t}$$

$$\gamma v = g - c \cdot e^{-\gamma t}$$

$$v(t) = \frac{g}{\gamma} - ce^{-\gamma t}$$

תנאי ההתחלה הוא שהמהירות ההתחלתית היא 0, כלומר

$$v(t = 0) = \frac{g}{\gamma} - c = v_0 \to c = \frac{g}{\gamma} - v_0$$

ולכן הפתרון למהירות כפונקציה של הזמן

$$v(t) = \frac{g}{\gamma} - \left(\frac{g}{\gamma} - v_0\right)e^{-\gamma t}$$

המהירות הסופית מתקבלת ב$t \to \infty$ והיא תהיה $v = \frac{g}{\gamma}$

טריק למהירות סופית: אם נרצה שהמהירות תהיה סופית, כלומר התאוצה תהיה 0 וממשוואת הכוחות אפשר לקבל את הקשר ישירות.

ב. עבור המהירות שחישבנו בסעיף א', נמצא את המיקום

$$x(t) = \int v(t)dt = \int \frac{g}{\gamma} - \left(\frac{g}{\gamma} - v_0\right)e^{-\gamma t}\,dt = \frac{g}{\gamma}t + \frac{1}{\gamma}\left(\frac{g}{\gamma} - v_0\right)e^{-\gamma t}$$

תרגיל 2 <1 4103>

א. כיוון התנועה היחיד הוא בציר y, ונגדיר את הכיוון החיובי כלפי מעלה.

$$W=\int_0^{-d}(-mg)\,dy=(-mg)(-d-0)=mgd$$

ב.

$$W_k=\int_0^{-d}k(-y)\,dy=-\left(\frac{ky^2}{2}\right)_0^{-d}=-\frac{kd^2}{2}$$

ג. בזמן הכיווץ:

$$W=W_g+W_k=K_f-K_i=0-\frac{1}{2}mv^2$$

$$mgd-\frac{kd^2}{2}=-\frac{1}{2}mv^2\rightarrow v^2=\frac{kd^2}{m}-2gd$$

ד. מגובה H עד הפגיעה בקפיץ:

$$W=W_g=\int_H^0-mg\,dy=(-mgy)_H^0=mgH$$

$$=K_f-K_i=\frac{1}{2}mv^2-0=\frac{kd^2}{2}-mgd$$

$$H=\frac{kd^2}{2mg}-d$$

ה. ביטוי לd כפונקציה של H:

$$\frac{kd^2}{2mg}-d-H=0$$

$$d_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+\frac{4k}{2mg}H}}{\frac{k}{mg}}=\frac{mg}{k}\left(1\pm\sqrt{1+\frac{2kH}{mg}}\right)$$

ניקח את הפתרון החיובי ונציב $H'=2H$

$$d_1=\frac{mg}{k}\left(1+\sqrt{1+\frac{4kH}{mg}}\right)$$

תרגיל 3 <1 4101>

1. נחפש את עבודת כוח הכובד כפונקציה של θ. אם ניצור תרשים כוחות ונבחר מערכת צירים רדיאלית ומשיקית, החלק הרדיאלי מאונך לכיוון התנועה בכל נקודה, לכן רכיב כוח הכובד שמבצע תנועה הוא הרכיב המשיקי

$$W=\int \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int mg\sin\theta' \, Rd\theta'=mgR\int_0^{\theta}\sin\theta' \, d\theta'=mgR(1-\cos\theta)$$

2. אם המהירות ההתחלתית היא 0,

$$W=K_f-K_i=K_f=mgR(1-\cos\theta)$$
$$\frac{1}{2}mv^2=mgR(1-\cos\theta)$$

3.

$$v_{\parallel}^2=2gR(1-\cos\theta)$$

התאוצה הרדיאלית

$$a_r=\frac{v_t^2}{R}=2g(1-\cos\theta)$$

והמשיקית

$$a_{\parallel}=\frac{dv_{\parallel}}{dt}=\frac{dv_{\parallel}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=\frac{dv_{\parallel}}{d\theta}\omega=\frac{dv_{\parallel}}{d\theta}\frac{v_{\parallel}}{R}=\frac{\frac{d}{d\theta}\left(2gR(1-\cos\theta)\right)^{\frac{1}{2}}v_{\parallel}}{R}=$$
$$\frac{1}{2}\left(2gR(1-\cos\theta)\right)^{-\frac{1}{2}}2gR\sin\theta\frac{1}{R}\left(2gR(1-\cos\theta)\right)^{\frac{1}{2}}=g\sin\theta$$

אפשר לקבל את התוצאה גם משיקולי כוחות.

4. נכתוב את משוואת כוחות רדיאלית

$$\sum F_{\perp}=mg\cos\theta-N=ma_{\perp}=m\frac{v_{\parallel}^2}{R}$$
$$N=mg\cos\theta-\frac{mv_{\parallel}^2}{R}=m\left(g\cos\theta-\frac{v_{\parallel}^2}{R}\right)$$

הגוף מתנתק כאשר $N=0$ כלומר

$$m\left(g\cos\theta-\frac{v_{\parallel}^2}{R}\right)=0\rightarrow\cos\theta=\frac{v_{\parallel}^2}{gR}$$

נציב את המהירות שקיבלנו

$$\cos\theta=\frac{2gR(1-\cos\theta)}{gR}=2-2\cos\theta$$
$$\cos\theta=\frac{2}{3}$$

אילו היה חיכוך, המהירות עבור אותה זווית θ הייתה משתנה. אינטואיטיבית, היא אמורה להיות קטנה יותר באותה זווית. האנרגיה הקינטית של המערכת קטנה עבור אותה זווית, כלומר

$$\frac{1}{2}mv^2=mgR(1-\cos\theta)-W_f\rightarrow v^2=2gR(1-\cos\theta)-\frac{2W_f}{m}$$

בציר הרדיאלי, סכום הכוחות הוא נשאר זהה עם ובלי החיכוך, לכן המשווה שקיבלנו עבור תנאי ההתנתקות נשאר זהה

$$\cos\theta=\frac{v_{\parallel}^2}{gR}$$

ונקבל

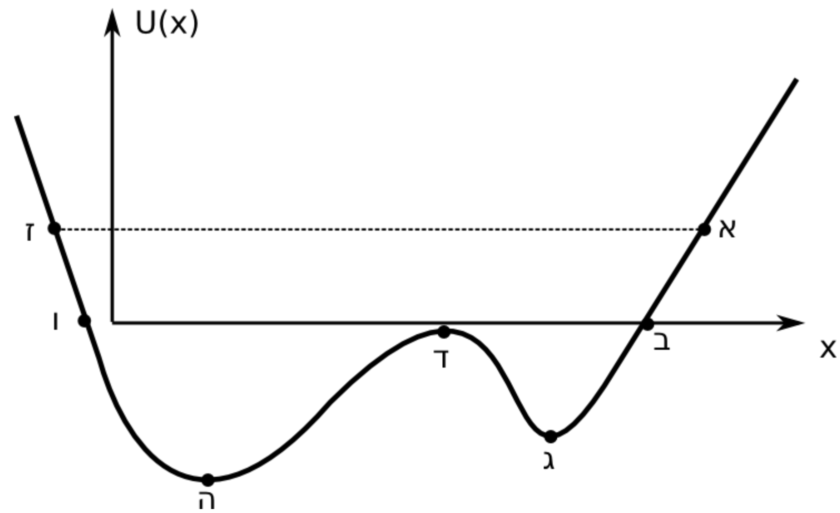
$$\cos\theta = \frac{2gR(1-\cos\theta)}{gR} - \frac{2W_f}{mgR} = 2 - 2\cos\theta - \frac{2W_f}{mgR}$$

ולכן הזווית

$$\cos\theta = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{W_f}{mgR}\right)$$

כלומר שבלי חיכוך $\cos\theta$ היה גדול יותר, ואנחנו יודעים שעבור $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ככל ש$\cos\theta$ גדול יותר, הזווית היא קטנה יותר, לכן עבור משטח בלי חיכוך, הגוף היה מתנתק בזווית קטנה יותר.

<u>תרגיל 4 <4224_1></u>



נתון כי האנרגיה הכוללת של הגוף היא הקו המקווקו.

באופן כללי אנרגיית הגוף היא $E = K + U(x)$

א. המהירות מתאפסת כאשר האנרגיה הקינטית מתאפסת וזה קורה כאשר כל האנרגיה של הגוף היא אנרגיה פוטנציאלית, כלומר בנקודות א' וז'.

ב. מהירות הגוף היא מקסימלית כאשר האנרגיה הפוטנציאלית היא מינימלית, וזה קורה בנקודה ה'.

ג. לפי ההגדרה $F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$, לכן כאשר נגזרת האנרגיה הפוטנציאלית מתאפסת, גם הכוח מתאפס, וזה קורה בנקודות ג',ד' וה'.

ד. לפי ההגדרה $F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$, כיוון הכוח הוא בניגוד לכיוון הנגזרת, כלומר כאשר שיפוע הגרף הוא שלילי הכוח פועל ימינה וכאשר הוא חיובי, הכוח יפעל שמאלה. לכן בין א' לג' הכוח הוא שמאלה, בין ג' לד' הוא ימינה, בין ד' לה' הוא שוב שמאלה, ובין ה' לז' הוא ימינה.

ה.

ו. מסלול לא קשור הוא מסלול בו הגוף יכול לברוח לאין סוף או למינוס אין סוף. במקרה הזה אין אפשרות כזו, לכן זהו מסלול קשור.