Parameters:

$L = 2[m]$,$m_1 = 5[kg]$,$m_2 = 0.01[kg]$,$v = 400[m/s]$,$x = 0.1[m]$

a. Conservation on angular momenta around the rod's axis (The gravity is parallel to the displacement vector):

$$L_z = (L - x)m_2 v \sin(90) = I\omega \tag{1}$$

The moment of inertia of the rod and the bullet is:

$$I = \frac{m_1 L^2}{12} + m_1(\frac{L}{2})^2 + m_2(L - x)^2 \tag{2}$$

So the angular velocity after the collision:

$$\omega = \frac{(L - x)m_2 v \sin(90)}{\frac{m_1 L^2}{12} + m_1(\frac{L}{2})^2 + m_2(L - x)^2} \tag{3}$$

b. The distance between the axis and the center of mass:

$$L_{cm} = \frac{m_1 \frac{L}{2} + m_2(L - x)}{m_1 + m_2} \tag{4}$$

Using conservation of energy:

$$\frac{I\omega^2}{2} = (m_1 + m_2)gL_{cm}(1 - \cos\varphi) \tag{5}$$

$$(1 - \cos\varphi) = \frac{I\omega^2}{2g(m_1 \frac{L}{2} + m_2(L - x))} \tag{6}$$

$$\varphi = \cos^{-1}(1 - \frac{I\omega^2}{2g(m_1 \frac{L}{2} + m_2(L - x))}) \tag{7}$$

נחשב את המהירות שחייבת להיות לכדור בהגיעו לשיא הגובה על מנת שישלים סיבוב. נעשה זאת באמצעות שיקולי כוחות. בנקודת שיא הגובה:

$$\sum F_y = 0 = m\frac{v^2}{R} - mg - N \rightarrow N = m\left(\frac{v^2}{R} - g\right)$$

סיבוב שלם יושלם אם בנקודה הזו הנורמאל יהיה גדול מאפס, ולכן:

$$N = m\left(\frac{v^2}{R} - g\right) > 0 \rightarrow v^2 > gR$$

כעת, נחפש גובה שחרור שיניב מהירות שכזו בנקודה הקריטית. שיקולי שימור אנרגיה נותנים:

$$mgH = mg2R + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

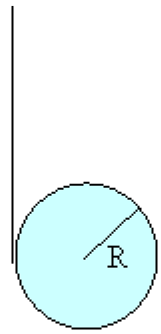
נשתמש בעובדה שאין החלקה כך ש- $\omega = v/r$ ונציב את מומנט ההתמד הנתון בבעיה:

$$mgH = 2mgR + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2\right)\left(\frac{v^2}{r^2}\right) = 2mgR + \frac{7}{10}mv^2$$

נבודד את המהירות ונדרוש את התנאי שקיבלנו מקודם:

$$v^2 = \frac{10g}{7}\left(H - 2R\right) > gR \rightarrow \boxed{H > \frac{27}{10}R}$$

פתרון תרגיל 6409 1:



משוואת כוחות:

$$\sum F_y = ma = mg - T$$

משוואת מומנטים סביב מרכז המסה (נבחר את כיוון השעון ככיוון חיובי):

$$\sum \tau = I\alpha = TR$$

נפתור שתי משוואות בשני נעלמים, יחד עם הקשר $a = \alpha R$ הנובע מהעובדה שהיויו מתגלגל ללא החלקה ונקבל לבסוף:

$$\boxed{T = \frac{mgI}{I + mR^2}\,;\, a = \frac{mgR^2}{I + mR^2}}$$

שני כדורים מחוברים

התנע הזוויתי והתנע הקווי נשמרים. מכיוון שזו התנגשות אלסטית גם האנרגיה נשמרת. בקשר לתנע הקווי, בגוף קשיח מתייחסים לתנע הקווי של מרכז המסה. בנוסף, מכיוון שהמפגש הוא על ציר x, נניח שמרכז המסה נע גם כן רק בציר x. נבחר כציר עבור התנע הזוויתי את מרכז המסה של המוט, וביחס לציר זה המרחק האופקי של הגוף השלישי לפני ההתנגשות הוא $\frac{L}{2\sqrt{2}}$. נסמן את מהירות מרכז המסה ב v_{cm}, ואת מהירות הגוף הנוסף לאחר ההתנגשות בu. נקבל שלוש משוואות (תנע, תנע זוויתי ואנרגיה בהתאמה):

$$mv_0 = mu + 2mv_{cm} \tag{1}$$

$$mv_0 \frac{L}{2\sqrt{2}} = mu\frac{L}{2\sqrt{2}} + I\omega \tag{2}$$

$$m\frac{v_0^2}{2} = m\frac{u^2}{2} + 2m\frac{v_{cm}^2}{2} + I\frac{\omega^2}{2} \tag{3}$$

נשתמש במשוואת התנע הקווי (1) על מנת לבטא את u:

$$u = v_0 - 2v_{cm}$$

נציב את זה בביטויים של התנע הזוויתי והאנרגיה (תוך כדי סידור קל של האלגברה):

$$v_0 = (v_0 - 2v_{cm}) + \frac{2\sqrt{2}}{mL}I\omega$$

$$v_0^2 = (v_0 - 2v_{cm})^2 + 2v_{cm}^2 + \frac{I}{m}\omega^2$$

עוד קצת ארגון אלגברי יתן:

$$v_{cm} = \frac{\sqrt{2}I}{mL}\omega$$

$$0 = 6v_{cm}^2 - 4v_{cm}v_0 + \frac{I}{m}\omega^2$$

ועכשיו ניתן להציב את המהירות הזוויתית מהמשוואה הראשונה בשניה לקבלת:

$$6v_{cm}^2 - 4v_{cm}v_0 + \frac{I}{m}\left(\frac{mL}{\sqrt{2}I}v_{cm}\right)^2 = 0$$

$$v_{cm}\left(6v_{cm} + \frac{mL^2}{2I}v_{cm} - 4v_0\right) = 0$$

מומנט ההתמד של שני כדורים זהים במרחק L ביחס למרכז המסה שלהם הוא:

$$I = m\left(\frac{L}{2}\right)^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}mL^2$$

נציב את זה בביטוי שקיבלנו למהירות מרכז המסה:

$$v_{cm}\left(6v_{cm} + \frac{mL^2}{2\cdot\frac{1}{2}mL^2}v_{cm} - 4v_0\right) = v_{cm}(7v_{cm} - 4v_0) = 0$$

מה שמשאיר שתי פתרונות. אחד הוא שמרכז המסה לא זז, והכדור נשאר במהירותו ההתחלתית, כלומר הוא בעצם חולף דרך הכדורים המחוברים. האופציה השניה (שבאמת מתארת התנגשות) היא ש:

$$v_{cm} = \frac{4}{7}v_0$$

$$\omega = \frac{mL}{\sqrt{2}I}v_{cm} = \frac{mL}{\sqrt{2}\frac{1}{2}mL^2}v_{cm} = \frac{2}{\sqrt{2}}\frac{v_{cm}}{L} = \frac{4}{7\sqrt{2}}\frac{v_0}{L}$$

$$u = v_0 - 2v_{cm} = v_0 - 2\cdot\frac{4}{7}v_0 = -\frac{1}{7}v_0$$

מסות על גלגלת

נרשום את משוואות התאוצה הקווית של שני הגופים:

$$M_2a_2=T_2-M_2g$$
$$M_1a_1=T_1-M_1g$$

בנוסף, יש לנו את את משוואת התנועה המעגלית:

$$I\alpha=T_2r_2-T_1r_1$$

עכשיו נוסיף את תנאי חוסר ההחלקה:

$$a_1=-\alpha r_1$$
$$a_2=\alpha r_2$$

נבודד את הTים מהמשוואה הראשונה:

$$T_2=M_2(a_2+g)=M_2(\alpha r_2+g)$$
$$T_1=M_1(a_1+g)=M_1(-\alpha r_1+g)$$

ונציב במשוואת התנועה המעגלית:

$$I\alpha=T_2r_2-T_1r_1=M_2r_2^2\alpha+M_2r_2g+M_1r_1^2\alpha-M_1r_1g$$
$$(I-M_2r_2^2-M_1r_1^2)\alpha=(M_2r_2-M_1r_1)g$$

א. נשווה את אלפה לאפס ונקבל:

$$0=(M_2r_2-M_1r_1)$$
$$\frac{M_2}{M_1}=\frac{r_1}{r_2}$$

כמובן שמשוואה זו היא פשוט השוואת סך המומנטים לאפס, וניתן היה להגיע אליה ישירות, אבל כבר חישבנו את אלפה באופן כללי אז למה לא להשתמש בזה.

ב. אם, ורק אם (ולא, זה לא מובן מאליו)

$$(I-M_2r_2^2-M_1r_1^2)\neq 0$$

ניתן לחלק בגורם זה ולקבל :

$$\alpha=\frac{(M_2r_2-M_1r_1)}{(I-M_2r_2^2-M_1r_1^2)}g$$

והתאוצות הן:

$$a_1=-\alpha r_1=-\frac{(M_2r_2-M_1r_1)}{(I-M_2r_2^2-M_1r_1^2)}gr_1$$
$$a_2=\frac{(M_2r_2-M_1r_1)}{(I-M_2r_2^2-M_1r_1^2)}gr_2$$

כאשר בכל האיזכורים שלו עד כאן I שווה ל:

$$I=\frac{m_1r_1^2}{2}+\frac{m_2r_2^2}{2}$$

ואל תבלבלו בבקשה בין m קטנה לM גדולה.