

מיקום מרכז המסה של מערכת ניתן ע"י הביטוי

$$\vec{R}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{R}_i}{\sum_i m_i} \quad (1)$$

כאשר  $m_i$  היא מסת חלק  $i$ , ו- $\vec{R}_i$  הוא וקטור המקום של מרכז המסה שלו. כל החישובים נעשים בקואורדינטות:

$$X_{cm} = \frac{\sum_i m_i X_i}{\sum_i m_i} \quad (2)$$

$$Y_{cm} = \frac{\sum_i m_i Y_i}{\sum_i m_i} \quad (3)$$

בצורות שבשאלה צפיפות החומר (ליחידת אורך)  $\rho$  אחידה, לכן כל מסה היא  $m_i = \rho L_i$ , כאשר  $L_i$  הוא אורך הצלע, ומרכז המסה של כל צלע נמצא באצמם.

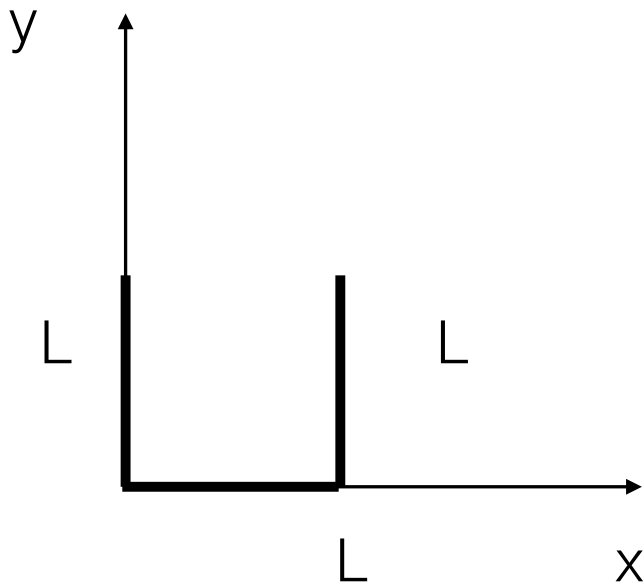


Figure 1:

$$X_1 = 0, \quad Y_1 = L/2, \quad m_1 = \rho L \quad (4)$$

$$X_2 = L/2, \quad Y_2 = 0, \quad m_2 = \rho L \quad (5)$$

$$X_3 = L, \quad Y_3 = L/2, \quad m_3 = \rho L \quad (6)$$

$$X_{cm} = L/2, \quad Y_{cm} = L/3 \quad (7)$$

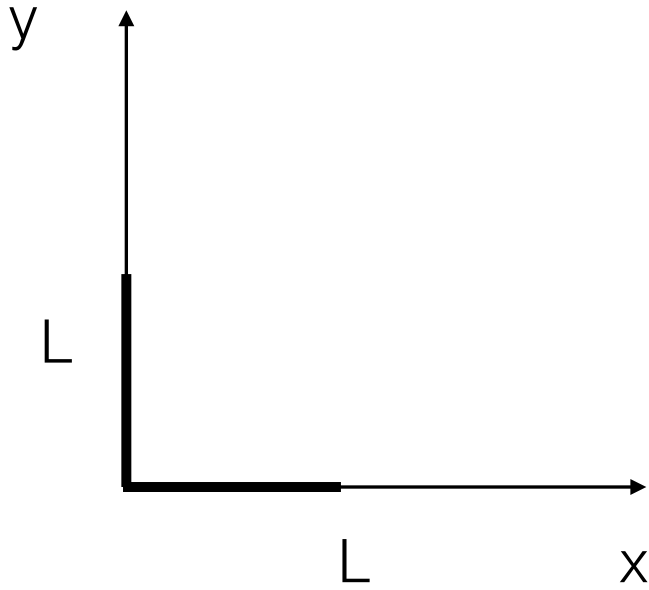


Figure 2:

$$X_1 = 0, \quad Y_1 = L/2, \quad m_1 = \rho L \quad (8)$$

$$X_2 = L/2, \quad Y_2 = 0, \quad m_2 = \rho L \quad (9)$$

$$X_{cm} = L/4, \quad Y_{cm} = L/4 \quad (10)$$

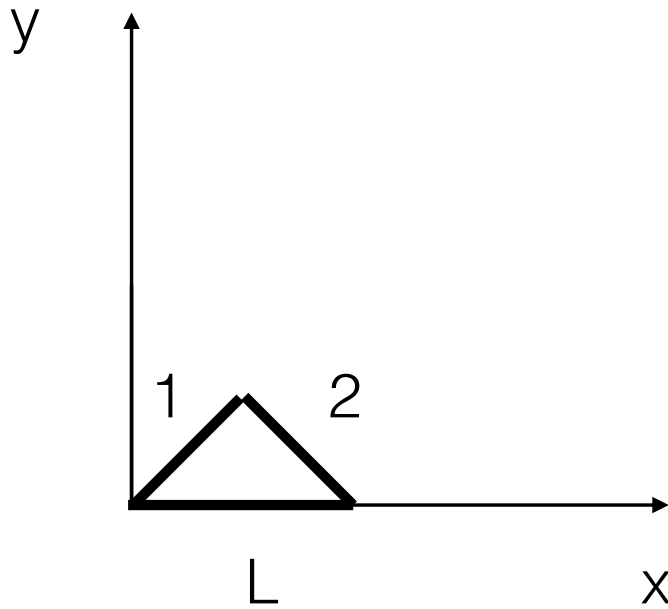


Figure 3:

אורך היתר הוא  $L$  לכן אורך הצלע הוא  $l = L/\sqrt{2}$

$$X_1 = L/4, \quad Y_1 = L/4, \quad m_1 = \rho l \quad (11)$$

$$X_2 = 3L/4, \quad Y_2 = L/4, \quad m_2 = \rho l \quad (12)$$

$$X_3 = L/2, \quad Y_3 = 0, \quad m_3 = \rho L \quad (13)$$

$$X_{cm} = L/2, \quad Y_{cm} = \frac{L\sqrt{2}}{4(1 + \sqrt{2})} \quad (14)$$

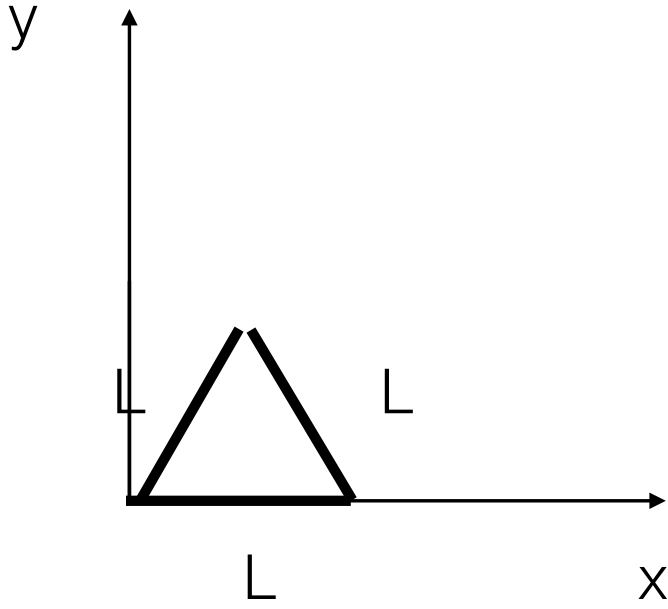


Figure 4:

$$X_1 = L/2, \quad Y_1 = 0, \quad m_1 = \rho L \quad (15)$$

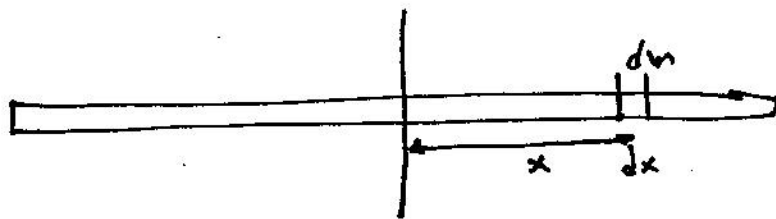
$$X_2 = L/4, \quad Y_2 = L\sqrt{3}/4, \quad m_2 = \rho L \quad (16)$$

$$X_3 = 3L/4, \quad Y_2 = L\sqrt{3}/4, \quad m_3 = \rho L \quad (17)$$

$$X_{cm} = L/2, \quad Y_{cm} = L\sqrt{3}/6 \quad (18)$$

4

מומנט סגור קו של באיך L ומסה M



~~...~~ קו סגור באיך במרכז המסה:

$$I = \int r^2 dm$$

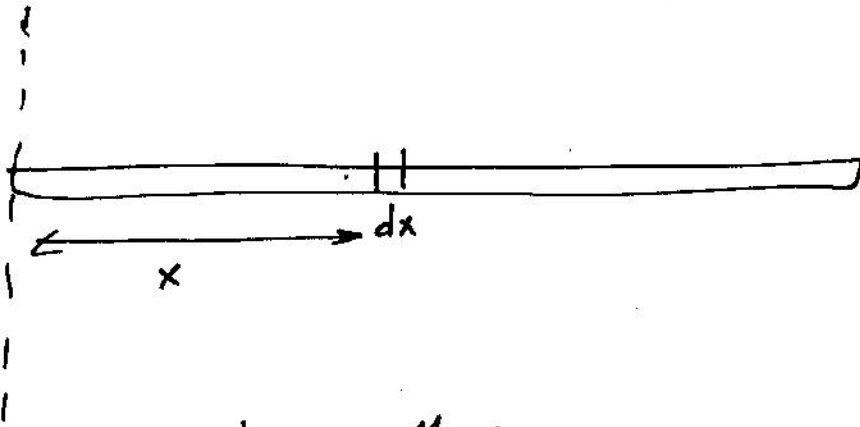
$$dm = \frac{M}{L} dx$$

$$I = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 \frac{M}{L} dx = \frac{M}{L} \cdot \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}$$

$$I = \frac{M}{L} \cdot \frac{1}{3} \left[ \left(\frac{L}{2}\right)^3 + \left(\frac{L}{2}\right)^3 \right]$$

$$I = \frac{M}{L} \cdot \frac{1}{3} \left[ 2 \left(\frac{L}{2}\right)^3 \right] = \frac{M}{L} \cdot \frac{2}{3} \left(\frac{L^3}{8}\right)$$

$$= \frac{M}{L} \frac{L^3}{12} = \frac{1}{12} ML^2$$



$$dm = \frac{M}{L} \cdot dx$$

$$I = \int_0^L x^2 \frac{M}{L} dx = \frac{M}{L} \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^L$$

$$= \frac{M}{L} \cdot \frac{1}{3} L^3 = \frac{1}{3} ML^2$$

**Solution – The Seven Coins:**

The moment of inertia is additive, hence we need to calculate the moment of inertia separately for each coin (around the required axis) and simply add.

Starting with the central coin:

$$I_{central} = \int r_{\perp}^2 dm = \left\{ \sigma = \frac{m}{\pi R^2} \right\} = \sigma \int_0^R r^2 r dr \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{1}{2} mR^2$$

And then, using the perpendicular axes theorem for the other coins:

$$I_{outer} = \frac{1}{2} mR^2 + m(2R)^2$$

So finally-

$$I_{tot} = I_{central} + 6I_{outer} = \frac{7}{2} mR^2 + 6m(2R)^2 = \boxed{\frac{55}{2} mR^2}$$

## מפצח האגוזים

נרשום את המומנטים הפועלים על הידית העליונה ביחס לציר בנקודת הציר של המפצח. נסמן את המרחק  $L = 13\text{cm}$  ובהתאם:  $\frac{L}{5} = 2.6\text{cm}$ .  
נסמן את הכוח שפועל על האגוז ב- $N$ , ונקבל עבור הידית העליונה:

$$FL - N\frac{L}{5} = 0$$

או בעצם:

$$N = 5F$$

כלומר הכוח מהידית העליונה בלבד הוא פי חמש מהכוח שפועל על האגוז. בשביל להפעיל  $46\text{N}$  משני צדי האגוז, די להפעיל  $\frac{46\text{N}}{5} = 9.2\text{N}$  משני צדי מפצח האגוזים. מכאן שמפצח האגוזים יעיל פי חמש מהפעלת כוח ישיר. (שוב נדגיש: הכוח פי חמש. העבודה שהוא יעשה לאורך מסלול זהה בדיוק).



## גשר על מים סוערים

משוואת הכוחות על הגשר נותנת לנו:

$$T_R + T_L - N - m_B g = 0$$

משוואת הכוחות על הילד נותנת לנו:

$$N - m_c g = 0$$

חיבור של המשוואות יתן:

$$T_R + T_L - m_c g - m_B g = 0$$

נחשב את המומנטים, ביחס לציר שעובר במרכז הגשר, כאשר נסמן את מיקום הנער ב- $x$ :

$$T_R \frac{L}{2} - N x - T_L \frac{L}{2} = 0$$

$$T_R \frac{L}{2} - m_c g x - T_L \frac{L}{2} = 0$$

$$T_R - T_L - 2m_c g \frac{x}{L} = 0$$

כדי למצוא את הגבלות התנועה על הנער, פעם נחבר את המשוואות לקבלת הגבול על המתיחות מימין, ופעם נחסר בשביל הגבול על המתיחות משמאל:

$$2T_R - m_B g - m_c g \left(2 \frac{x}{L} + 1\right) = 0$$

$$T_R = \frac{m_B g}{2} + \frac{m_c g}{2} \left(2 \frac{x}{L} + 1\right) \leq T_{R\text{מקס}}$$

$$m_c g \frac{x}{L} \leq T_{R\text{מקס}} - \frac{m_B g}{2} - \frac{m_c g}{2}$$

$$x \leq \left( \frac{T_{R\text{מקס}}}{m_c g} - \frac{m_B}{2m_c} - \frac{1}{2} \right) \cdot L$$

$$x \leq \left( \frac{350N}{40kg \cdot 10 \frac{N}{kg}} - \frac{20kg}{80kg} - \frac{1}{2} \right) \cdot 2m$$

$$x \leq 0.25m$$

חיסור המשוואות בעצם אומר להחליף את  $T_R$  ב- $T_L$ , ואת  $x$  ב- $-x$ :

$$-x \leq \left( \frac{T_{L\text{מקס}}}{m_c g} - \frac{m_B}{2m_c} - \frac{1}{2} \right) \cdot L$$

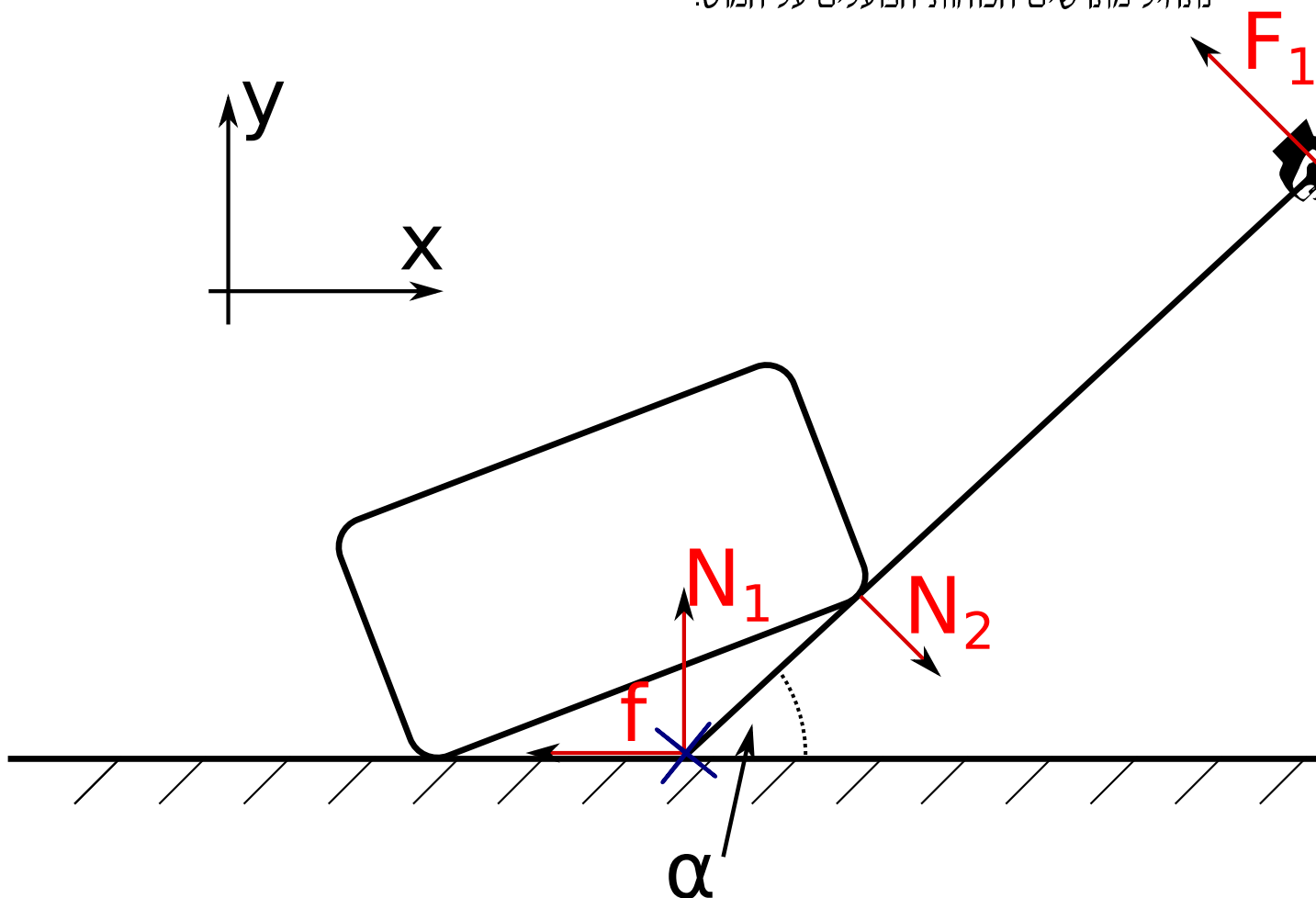
$$x \geq - \left( \frac{400N}{40kg \cdot 10 \frac{N}{kg}} - \frac{20kg}{80kg} - \frac{1}{2} \right) \cdot 2m$$

$$x \geq -0.5m$$

כלומר  $-0.5m \leq x \leq 0.25m$

# הרמת קופסאות

נתחיל מתרשים הכוחות הפועלים על המוט:



המערכת במנוחה, ולכן ידוע שסכום המומנטים מתאפס. נבחר כנקודת ציר את נקודת המגע עם הרצפה, ונחשב את המומנטים. נתון לנו שנקודת המגע של הפינה הימנית של הקופסא היא ברבע מאורך המוט. נסמן את אורך המוט ב- $L$  ונקבל את סכום המומנטים:

$$\sum \tau = F_1 L - N_2 \frac{L}{4} = 0$$

$$F_1 L = N_2 \frac{L}{4}$$

$$N_2 = 4F_1$$

וקיבלנו שהכוח הפועל על הפינה הימנית של הקופסא הוא פי 4 מהכוח אותו אנחנו מפעילים. זו דוגמא ל"מכונה פשוטה" (חפשו בויקיפדיה), שעוזרת מאוד בביצוע מטלות. שימו לב שהעבודה שנעשית (אינטגרל על כוח כפול דרך) זהה כמובן. לא ניתן להרוויח אנרגיה מכלום, אבל ניתן להפעיל פחות כוח על דרך ארוכה יותר.

בשביל הכוח שהמוט מפעיל על הרצפה נוסיף את משוואות הכוחות בשני הצירים:

$$F_1 \cos \alpha - N_2 \cos \alpha + N = 0$$

$$-F_1 \sin \alpha + N_2 \sin \alpha - f = 0$$

נקבל מיידית:

$$N = N_2 \cos \alpha - F_1 \cos \alpha = 4F_1 \cos \alpha - F_1 \cos 2\alpha = 3F_1 \cos \alpha$$

בשביל לקבל את החיכוך, נעזר בתנאי על חיכוך סטטי, יחד עם משוואת הכוחות בציר  $x$ :

$$f \leq \mu_s N$$

$$f = -F_1 \sin \alpha + N_2 \sin \alpha = -F_1 \sin \alpha + 4F_1 \sin \alpha = 3F_1 \sin \alpha$$

$$= N \tan \alpha$$

$$N \tan \alpha \leq \mu_s N$$

$$\mu_s \geq \tan \alpha$$

כאשר בדרך הצבנו  $3F_1 \cos \alpha = N$ .  
קיבלנו תנאי על מקדם החיכוך שתלוי רק בזווית המוט.