(3)

גוף שמסתו m נע לאורך ציר x בהשפעת הכח $\vec{F}=-\alpha x^2\hat{x}$ כאשר קבוע $\alpha>0$

נתון כי ברגע $t=0$ מיקום הגוף $x(0)=x_i$ ו- $V(0)=V_i$ $\quad V_i>0$

א) מהי העבודה שמבצע הכח $\vec{F}$ על המסה מנק' x_i לנק' x_f ; $x_f>x_i$

ב) רשמו את האנרגיה המכנית הכוללת של הגוף.

ג) מהי הנקודה הרחוקה ביותר מהראשית אליה יגיע הגוף?

$$W=\int_{x_i}^{x_f}\vec{F}\cdot d\vec{s}=-\alpha\int_{x_i}^{x_f}x^2dx=-\frac{\alpha}{3}\left(x_f^3-x_i^3\right)=\frac{\alpha}{3}\left(x_i^3-x_f^3\right)$$

ב) משפט העבודה והאנרגיה $\quad W_{i\to f}=E_{k_f}-E_{k_i}$

$$\frac{\alpha}{3}x_i^3-\frac{\alpha}{3}x_f^3=\frac{1}{2}mV_f^2-\frac{1}{2}mV_i^2$$

$$\frac{\alpha}{3}x_i^3+\frac{1}{2}mV_i^2=\frac{1}{2}mV_f^2+\frac{\alpha}{3}x_f^3=const=E=\frac{1}{2}mv^2+\frac{\alpha}{3}x^3$$

באותה מידה יכולנו לקבל $\quad F=-\frac{dU}{dx}\Rightarrow U=-\int F\,dx=\frac{\alpha}{3}x^3$

ג) עבור הנק' הרחוקה ביותר $V_f=0$

$$\frac{\alpha}{3}x_i^3+\frac{1}{2}mV_i^2=\frac{\alpha}{3}x_f^3$$

$$x_f=\left(x_i^3+\frac{3m}{2\alpha}V_i^2\right)^{\frac{1}{3}}$$

Let the part of the chain that's not on the table be *x*, and let us define the 1D mass density $\lambda = M / L$. The total force acting on the chain as a function of *x* is-

$$F = \lambda x g - f = \lambda x g - \mu\lambda\left(L - x\right)g$$

Using the energy and work theorem we get-

$$E_k\left(f\right) - E_k\left(i\right) = W_{\text{tot}}$$

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = \int_{x=L/4}^{L} F dx = \lambda g \int_{x=L/4}^{L} \left[x - \mu\left(L - x\right)\right]dx = \frac{3}{32}\lambda g L^2\left(5 - 3\mu\right)$$

And finally-

$$\boxed{v_f = \sqrt{\frac{3}{16}gL\left(5 - 3\mu\right)}}$$

Notice that there is a condition for the sliding to even begin! What is it?

חוט ומסמר

הכוחות הפועלים על המסה הם רק הכובד והמתיחות. בבעיה שלפנינו המתיחות תמיד ניצבת לתנועה ולכן היא אינה עושה עבודה. אם כן, יש שימור אנרגיה מכנית. נקבע את גובה האפס ($h_0 = 0$) בנקודת ההתחלה של התנועה. האנרגיה בהתחלה היא:

$$E_i = K_i + U_i = 0$$

כשהחוט בזווית α, הגוף נמצא בגובה:

$$h_1 = \frac{L}{2}(\cos\alpha - 1)$$

לכן האנרגיה המכנית בסוף היא:

$$E_f = K_f + U_f = \frac{mv_1^2}{2} + mg\frac{L}{2}(\cos\alpha - 1)$$

כמו שאמרנו קודם לא נעשית עבודה אחרת ולכן האנרגיה נשמרת, ונקבל:

$$E_i = E_f$$
$$0 = \frac{mv_1^2}{2} + mg\frac{L}{2}(\cos\alpha - 1)$$
$$v_1^2 = gL(1 - \cos\alpha)$$

בסעיף הבא שואלים לגבי המתיחות. בחלק הזה של השאלה, התאוצה הרדיאלית צריכה להיות שווה ל:

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{L/2} = 2\frac{v^2}{L}$$

הכוחות ברכיב הרדיאלי הם:

$$T + mg\cos\alpha$$

ולכן:

$$T + mg\cos\alpha = 2m\frac{v^2}{L}$$
$$\frac{T}{m} = 2\frac{v^2}{L} - g\cos\alpha = 2g(1 - \cos\alpha) - g\cos\alpha = g(2 - 3\cos\alpha)$$

כאשר הצבנו בדרך את המהירות בזווית תטא שמצאנו בפרק הקודם. מכאן אנחנו מקבלים שכשהמתיחות מתאפסת, הקוסינוס שווה $\frac{2}{3}$.

על גוף בעל מסה m פועל כוח F בכיוון ציר x, על פי הנוסחא הבאה: $F(t) = F_0(1 - \frac{t}{T})$

על פי החוק השני של ניוטון, התאוצה תהיה:

$$a(t) = \frac{F_0}{m}(1 - \frac{t}{T})$$

נבצע אינטגרציה לקבלת המהירות:

$$v(t) = \int a\,dt = \int \frac{F_0}{m}(1 - \frac{t}{T})dt = \frac{F_0}{m}(t - \frac{t^2}{2T}) + c$$

כאשר ידוע כי המהירות בזמן t=0 הייתה v0 ולכן:

$$v(t=0) = \frac{F_0}{m}(t - \frac{t^2}{2T}) + c = c = {}_0$$

וגילינו כי c=v0. נמשיך באינטגרציה לקבלת המיקום:

$$vx(t) = \int v\,dt = \frac{F_0}{m}(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6T}) + v_0 t + c_2$$

על ידי הצבת המיקום ב0 (0) נקבל את התשובה הסופית למיקום:

$$x(t) = \frac{F_0}{m}(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6T}) + v_0 t$$

נציב t=T בנוסחאות למיקום ולמהירות:

1. $x(T) = \frac{F_0}{m}(\frac{T^2}{2} - \frac{T^3}{6T}) + v_0 T = \frac{F_0}{3m}T^2 + v_0 T$
2. $v(T) = \frac{F_0}{m}(T - \frac{T^2}{2T}) + v_0 = \frac{F_0}{2m}T + v_0$

מומלץ לבדוק את התשובה מבחינת יחידות, וגם לגזור את המיקום לקבלת המהירות, ואת המהירות לתאוצה.