תרגיל III :

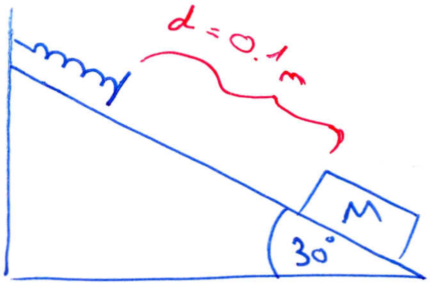
מסה , $M=2kg$ מקבלת מהירות התחלתית של $V_0=2\frac{m}{sec}$

במרחק 0.1_m מקפיץ בעל קבוע קפיץ של $k=50\frac{N}{m}$.

1) מה מקסימום ההתכווצות של הקפיץ?

א. כאשר המשטח חלק?

ב. כאשר מקדם החיכוך הקינטי $\mu_k=0.1$?



פתרון :

* נסמן את שיעור ההתכווצות ב x

* נשתמש בשימור אנרגיות ע"מ לחשב את x.

א) $$E_f = E_i \Longrightarrow mg\sin\theta(d+x)+\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}mV_0^2$$

$$x^2+\frac{m}{k}g\sin\theta\cdot x+\frac{m}{k}g\sin\theta\cdot d-\frac{1}{2}\frac{m}{k}V_0^2=0$$

$$X_{1,2}=\frac{-\frac{m}{k}g\sin\theta\pm\sqrt{(\frac{m}{k}g\sin\theta)^2+2\frac{m}{k}V_0^2}}{2}\longrightarrow X=\frac{-\frac{2}{50}\cdot10\cdot\frac{1}{2}+\sqrt{(\frac{2}{50}\cdot10\cdot\frac{1}{2})^2+\frac{2\cdot2\cdot4}{50}}}{2}$$

פתרון לא פיזיקלי.

$$\boxed{X=0.4_m}$$

ב) כאשר יש חיכוך

$$E_f=E_i+W_f$$

נמצא את W_f:

$$W_f=\int_0^{d+\tilde{x}}-N\cdot\mu_k\cdot dx$$

$$N=mg\cos\theta$$

$$W_f=-mg\cos\theta\cdot\mu_k\cdot(d+\tilde{x})$$

$$mg\sin\theta\cdot(d+\tilde{x})+\frac{1}{2}k\tilde{x}^2=\frac{1}{2}mV_0^2-mg\cos\theta\cdot\mu_k\cdot(d+\tilde{x})$$

נסדר את המשוואה

$$\tilde{x}^2+\tilde{x}\cdot\frac{2}{k}\left(mg\sin\theta+mg\cos\theta\cdot\mu_k\right)+\frac{2mgd}{k}\left(\sin\theta+\cos\theta\cdot\mu_k\right)-\frac{mV_0^2}{k}=0$$

לאחר פתרון המשוואה הריבועית נקבל כי:

$$\tilde{x}_{1,2}=-0.23\pm 0.41_m \rightarrow \boxed{\tilde{x}=0.18_m}$$

פתרון לא

פיזיקלי

חוט ומסמר

הכוחות הפועלים על המסה הם רק הכובד והמתיחות. בבעיה שלפנינו המתיחות תמיד ניצבת לתנועה ולכן היא אינה עושה עבודה. אם כן, יש שימור אנרגיה מכנית. נקבע את גובה האפס ($h_0 = 0$) בנקודת ההתחלה של התנועה. האנרגיה בהתחלה היא:

$$E_i = K_i + U_i = 0$$

כשהחוט בזווית α, הגוף נמצא בגובה:

$$h_1 = \frac{L}{2}(\cos\alpha - 1)$$

לכן האנרגיה המכנית בסוף היא:

$$E_f = K_f + U_f = \frac{mv_1^2}{2} + mg\frac{L}{2}(\cos\alpha - 1)$$

כמו שאמרנו קודם לא נעשית עבודה אחרת ולכן האנרגיה נשמרת, ונקבל:

$$E_i = E_f$$
$$0 = \frac{mv_1^2}{2} + mg\frac{L}{2}(\cos\alpha - 1)$$
$$v_1^2 = gL(1 - \cos\alpha)$$

בסעיף הבא שואלים לגבי המתיחות. בחלק הזה של השאלה, התאוצה הרדיאלית צריכה להיות שווה ל:

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{L/2} = 2\frac{v^2}{L}$$

הכוחות ברכיב הרדיאלי הם:

$$T + mg\cos\alpha$$

ולכן:

$$T + mg\cos\alpha = 2m\frac{v^2}{L}$$
$$\frac{T}{m} = 2\frac{v^2}{L} - g\cos\alpha = 2g(1-\cos\alpha) - g\cos\alpha = g(2 - 3\cos\alpha)$$

כאשר הצבנו בדרך את המהירות בזווית תטא שמצאנו בפרק הקודם. מכאן אנחנו מקבלים שכשהמתיחות מתאפסת, הקוסינוס שווה $\frac{2}{3}$.

3

גוף שמסתו m נע לאורך ציר x בהשפעת הכח $\vec{F}=-\alpha x^2\hat{x}$ כאשר $\alpha>0$

נתון כי ברגע $t=0$ מיקום הגוף $x(0)=x_i$ ו- $v(0)=v_i$ $\quad v_i>0$

א) מהי העבודה שמבצע הכח $\vec{F}$ על המסה מנק' x_i לנק' x_f ; $\quad x_f>x_i$

ב) רשמו את האנרגיה המכנית הכוללת של הגוף.

ג) מהי הנקודה הרחוקה ביותר מהראשית אליה יגיע הגוף?

$$W=\int_{x_i}^{x_f}\vec{F}\cdot d\vec{s}=-\alpha\int_{x_i}^{x_f}x^2\,dx=-\frac{\alpha}{3}\left(x_f^3-x_i^3\right)=\frac{\alpha}{3}\left(x_i^3-x_f^3\right)$$

ב) ממשפט העבודה והאנרגיה $\quad W_{i\to f}=E_{k_f}-E_{k_i}$

$$\frac{\alpha}{3}x_i^3-\frac{\alpha}{3}x_f^3=\frac{1}{2}mv_f^2-\frac{1}{2}mv_i^2$$

$$\frac{\alpha}{3}x_i^3+\frac{1}{2}mv_i^2=\frac{1}{2}mv_f^2+\frac{\alpha}{3}x_f^3=const=E=\frac{1}{2}mv^2+\frac{\alpha}{3}x^3$$

באותה מידה יכולנו לקבל $\quad F=-\frac{dU}{dx}\Rightarrow U=-\int F\,dx=\frac{\alpha}{3}x^3$

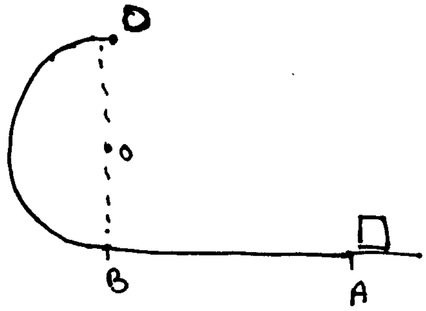
ג) עבור הנק' הרחוקה ביותר $v_f=0$

$$\frac{\alpha}{3}x_i^3+\frac{1}{2}mv_i^2=\frac{\alpha}{3}x_f^3$$

$$x_f=\left(x_i^3+\frac{3m}{2\alpha}v_i^2\right)^{\frac{1}{3}}$$

4.6 2X-09-01

א)



יש שימור אנרגיה היות והמשטח חלק ולכן:

$$E_i = E_f$$

$$(1) \quad \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_D^2 + mgh_c \qquad h_c = 2R$$

נמצא את V_D ~~הקריטית~~ (המינימלית) V הדרושה ~~להשלמת~~ לביצוע התנועה.

נסתכל על נק' D:

בנק' D:

$$\Sigma F_r = ma_r$$

$$\Sigma F_r = \frac{mv_D^2}{R}$$

$$N + mg = \frac{mv_D^2}{R}$$

$$\Rightarrow \quad V_D = \sqrt{\frac{NR}{m} + gR}$$

את המהירות הקריטית נקבל כאשר $N=0$ כלומר:

$$\boxed{V_{D_c} = \sqrt{gR}}$$

②

חזרה למש (1) :

$$\frac{1}{2}mV_A^2 = \frac{1}{2}m\cdot gR + mg(2R)$$

$$V_A^2 = gR + 4gR$$

$$V_A = \sqrt{5gR}$$

(ג) נפתור סעיף זה ע"י קינמטיקה.
נחשב תחילה כמה זמן ייקח לגוף ליפול ~~מ~~ גובה של (2R).

$$y = y_0 + V_{0y}\cdot t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

$$0 = 2R + 0 - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t^2 = \frac{4R}{g}$$

$$t = \sqrt{\frac{4R}{g}}$$

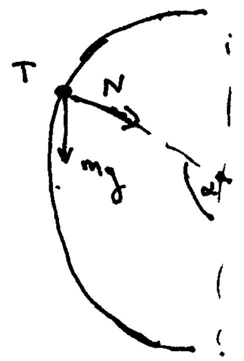
כעת נחשב את המרחק האופקי שהגוף עבר בזמן זה.
נשים לב שבנק' D המהירות שחישבנו בסעיף ב' V_{D_c} -
היא ~~...~~ בכיוון האופקי בלבד (משיק).

$$X = X_0 + V_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

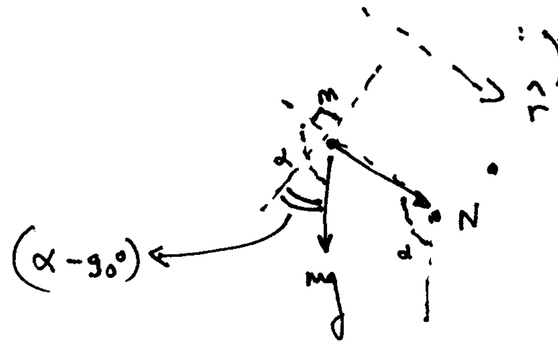
ביחס לנק' B $\rightarrow$ $X = V_{0x}\cdot t = \sqrt{gR}\cdot\sqrt{\frac{4R}{g}} = 2R$ $(a_x = 0)$ $\Longrightarrow$

$$\boxed{\text{תשובה סופית: הכדור יפגע ביחס לנק' } A \text{ במרחק של } S-2R}$$

ג. הגוף ינתק מהמסילה בנקודה בה $N=0$.



נבחר מערכת צירים כך:



$$\Sigma F_r = m \cdot a_r$$

$$N + mg\sin(\alpha - 90^\circ) = m \cdot a_r$$

בנק' T בה מתרחש הניתוק $N=0$ ולכן:

$$mg\sin(\alpha - 90^\circ) = m \cdot a_r$$

$$(1) \quad \cancel{m}g\sin(\alpha - 90^\circ) = \frac{\cancel{m}V_T^2}{R}$$

נסתכל על שימור האנרגיה:

$$E_i = E_f$$

$$\frac{1}{2}mV_A^2 = \frac{1}{2}mV_T^2 + mgh_T \qquad h_T = R + R\sin(\alpha - 90^\circ)$$

$$V_A = 0.9 \cdot \sqrt{5gR} = \sqrt{4.05\,gR}$$

$$\Rightarrow \quad V_T^2 = V_A^2 - 2gh_T \quad ,$$

4

$$(ii) \quad V_T^2 = 4.05gR - 2gR\left[1 + \sin(\alpha - 90^\circ)\right]$$

נציב את הביטוי שקבלנו עבור V_T^2 במשוואה (i) ונקבל:

$$g:/ \quad \cancel{m}g \sin(\alpha - 90^\circ) = \cancel{m}\, 4.05g - 2g\cancel{R}\left[1 + \sin(\alpha - 90^\circ)\right]$$

$$3 \sin(\alpha - 90^\circ) = 2.05 \,.$$

$$\sin(\alpha - 90^\circ) = 0.68$$

$$\Rightarrow \quad \alpha - 90^\circ = 43.10^\circ$$

$$\alpha = 133.10^\circ$$

//

גרף עם פוטנציאל

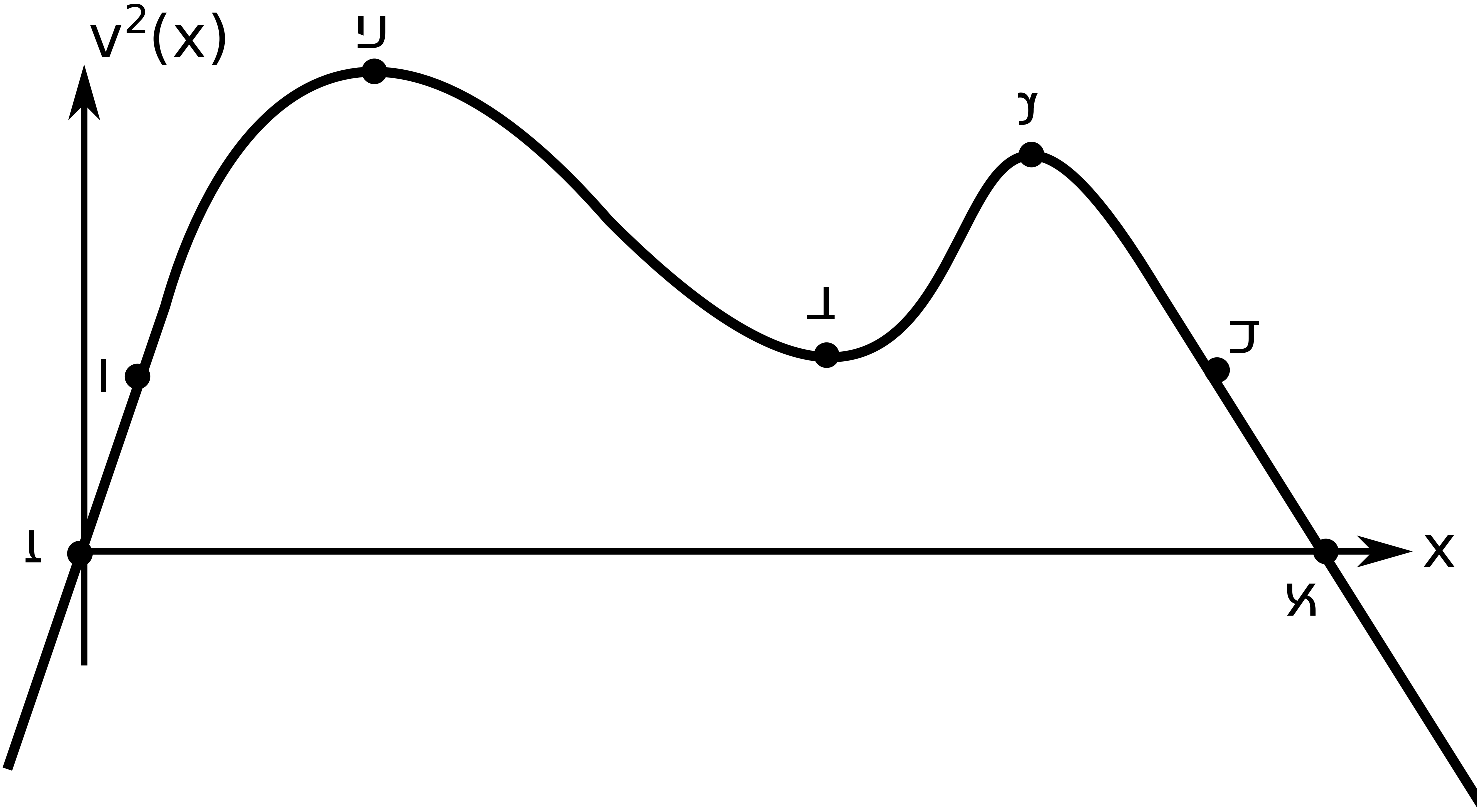
א. מהירות הגוף מתאפסת כאשר האנרגיה הקינטית מתאפסת, וזה קורה כשאין הפרש בין הקו המקווקו לגרף הפוטנציאל. זה קורה בשתי נקודות, א' וז'.

ב. מהירות הגוף מקסימלית כשההפרש בין הקו המקווקו לגרף האנרגיה מקסימלי, וזה קורה בנקודה ה'.

ג. הכוח מתאפס כשנגזרת הפוטנציאל מתאפסת, וזה קורה בג',ד',וה'.

ד. כיוון הכוח נקבע על ידי הנגזרת. כאשר היא חיובית, הכוח שמאלה, וכשהיא שלילית הכוח ימינה. במקרה שלנו, הכוח ימינה בין ג' לד' ובין ה' לז', והכוח שמאלה בין א' לג' ובין ד' לה'.

ה. המהירות בריבוע שווה להפרש בין הקו המקווקו לגרף הפוטנציאל (עד כדי מסה חלקי שתיים), לכן פשוט צריך להפוך את הדף:



ו. הגוף לא יכול לנוע לאינסוף או למינוס אינסוף, ולכן הוא במסלול קשור.

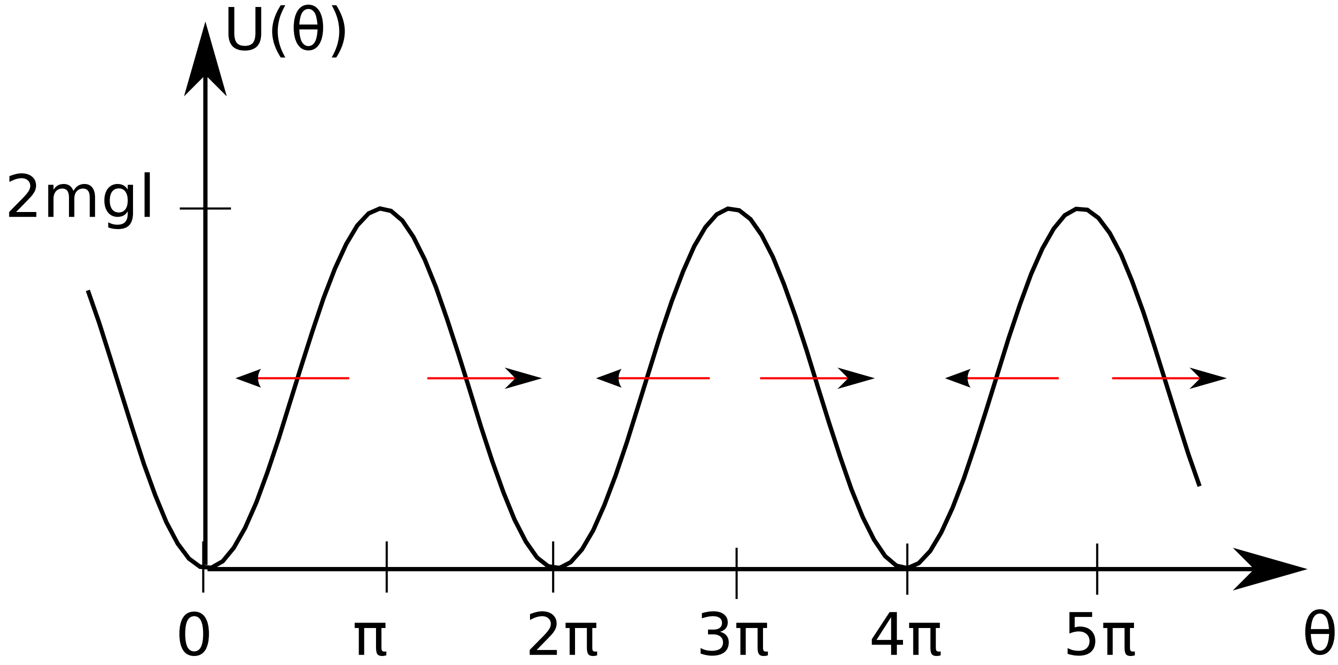
פוטנציאל של מטוטלת

א. על הגוף פועלים שני כוחות, כוח הכובד, והכוח של המוט. הכוח של המוט תמיד ניצב לכיוון התנועה ולכן לא עושה עבודה. כוח הכובד משמר כמובן, עם פוטנציאל mgh.

ב. האנרגיה הפוטנציאלית היא כאמור mgh. נבטא את גובה הגוף כתלות בזווית, כאשר נבחר קודם בצורה שרירותית את גובה ה0 להיות בנקודה הכי נמוכה של הגוף. מטריגונומטריה נקבל:

$$h = l(1 - \cos\theta)$$
$$U(\theta) = mgh = mgl(1 - \cos\theta)$$

ג.



ד. החצים האדומים מציגים את כיוון הכוח.

ה. יש נקודות שיווי משקל (כאשר שיפוע הפוטנציאל 0), גם ב$2\pi n = \theta$ וגם ב$\theta = 2\pi n + 1$.

הנקודות הנמוכות ($\theta = 2\pi n$) הן במינימום , והן יציבות. אלה הנקודות כאשר הגוף נמצא בתחתית המעגל. הנקודות הגבוהות הן במקסימום, והן לא יציבות. אלה המצבים בהם הגוף נמצא בנקודה העליונה במעגל.

ו. הגוף יכול לבצע הן מסלולים קשורים והן מסלולים לא קשורים. המסלולים הקשורים נמצאים בין שני פיקים של הפוטנציאל. מדובר במצב בו המטוטלת מתנדנדת הלוך ושוב. המסלולים הלא קשורים נמצאים מעל הפיקים של הפוטנציאל, ובמסלולים אלה גוף מבצע תנועה מעגלית כאשר כל הסיבובים לאותו כיוון. כמובן שהוא מאיט ומאיץ תוך כדי, אבל לא משנה כיוון.

ז. מצבים קשורים יתרחשו כאשר האנרגיה המכנית הכוללת נמצאת בין המינימום למקסימום של הפוט-נציאל. שימו לב שהאנרגיה המכנית הכוללת, וגם המינימות והמקסימות תלויים בנקודת האפס שבחרתם, אבל כמובן שתחום האנרגיה הקינטית בתחתית המעגל חייב להיות זהה בכל הפתרונות. במקרה שלנו:

$$U_{min} < K_0 + U_0 < U_{max}$$

$$U_0 = U(0) = 0$$
$$U_{min} = U(0) = 0$$
$$U_{max} = U(\pi) = 2mgl$$

$$0 < K_0 < 2mgl$$