$$d m v + I_1 \underbrace{\omega_1}_{=0} = d m u + I_1 \omega_2 \quad ; \; I = \frac{MR^2}{2}.$$

(c

$$\omega_2 = \frac{d m (v-u)}{I_1} = \frac{0.15 \cdot 0.01 \, (400-200)}{2 \cdot 0.2^2/2} = 7.5 \ \frac{rad}{sec}$$

(d

$$\Delta E = \frac{m v^2}{2} - \frac{m u^2}{2} - \frac{I_1 \omega_2^2}{2} = 598.875 \ J$$

<u>פתרון:</u>

<u>א</u>) ההתנגשות היא אלסטית, לכן האנרגיה הקינטית נשמרת.

סכום הכוחות החיצוניים הוא אפס, לכן התנע הקווי של כל המערכת (דיסקה קטנה + מוט) נשמר.

סכום המומנטים גם אפס, לכן התנע הזוויתי של כל המערכת נשמר.

ב) האנרגיה הקינטית לפני ההתנגשות היא אנרגית הדיסקה. אחרי ההתנגשות יש לנו את האנרגיה הקינטית של מרכז המסה של המוט + האנרגיה הקינטית ה"סיבובית" של המוט (ומכיוון שרוצים שהדיסקה תשאר במנוחה, האנרגיה הקינטית שלה לאחר ההתנגשות היא אפס):

$$E_{Ki}=\frac{1}{2}mv^2=E_{Kf}=\frac{1}{2}MV_{CM}{}^2+\frac{1}{2}I\omega^2$$

גודל התנע הזוויתי ברגע שהדיסקה פוגעת במוט הוא $l=mvd$. לאחר ההתנגשות התנע הזוויתי של המוט הוא $I\omega$, כש-I הוא מומנט ההתמד של המוט:

$$l=mvd=I\omega \quad\Rightarrow\quad \omega=\frac{mvd}{I}$$

שימור התנע הקווי:

$$p_{x,i}=mv+M.0=p_{x,f}=m.0+MV_{CM,x} \quad\Rightarrow\quad V_{CM,x}=\frac{m}{M}v$$

$$p_{y,i}=0=p_{yf}=MV_{CM,y} \quad\Rightarrow\quad V_{CM,y}=0$$

עכשיו נציב את V_{CM} ו- ω במשוואה הראשונה:

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}M\frac{m^2}{M^2}v^2+\frac{1}{2}I\frac{m^2v^2d^2}{I^2} \quad\Rightarrow\quad 1=\frac{m}{M}+\frac{md^2}{I}=m\left(\frac{1}{M}+\frac{d^2}{I}\right)=m\left(\frac{I+d^2M}{MI}\right)$$

$$\Rightarrow\quad m=\frac{MI}{I+d^2M}$$

מומנט ההתמד של מוט סביב מרכזו: $I=\frac{ML^2}{12}$. נציב את זה במשוואה האחרונה:

$$m=\frac{M\frac{ML^2}{12}}{\frac{ML^2}{12}+d^2M}=\frac{ML^2}{L^2+12d^2}$$

שני כדורים מחוברים

התנע הזוויתי והתנע הקווי נשמרים. מכיוון שזו התנגשות אלסטית גם האנרגיה נשמרת. בקשר לתנע הקווי, בגוף קשיח מתייחסים לתנע הקווי של מרכז המסה. בנוסף, מכיוון שהמפגש הוא על ציר x, נניח שמרכז המסה נע גם כן רק בציר x. נבחר כציר עבור התנע הזוויתי את מרכז המסה של המוט, וביחס לציר זה המרחק האופקי של הגוף השלישי לפני ההתנגשות הוא $\frac{L}{2\sqrt{2}}$. נסמן את מהירות מרכז המסה ב v_{cm}, ואת מהירות הגוף הנוסף לאחר ההתנגשות בu. נקבל שלוש משוואות (תנע, תנע זוויתי ואנרגיה בהתאמה):

$$mv_0 = mu + 2mv_{cm} \tag{1}$$

$$mv_0\frac{L}{2\sqrt{2}} = mu\frac{L}{2\sqrt{2}} + I\omega \tag{2}$$

$$m\frac{v_0^2}{2} = m\frac{u^2}{2} + 2m\frac{v_{cm}^2}{2} + I\frac{\omega^2}{2} \tag{3}$$

נשתמש במשוואת התנע הקווי (1) על מנת לבטא את u:

$$u = v_0 - 2v_{cm}$$

נציב את זה בביטויים של התנע הזוויתי והאנרגיה (תוך כדי סידור קל של האלגברה):

$$v_0 = (v_0 - 2v_{cm}) + \frac{2\sqrt{2}}{mL}I\omega$$

$$v_0^2 = (v_0 - 2v_{cm})^2 + 2v_{cm}^2 + \frac{I}{m}\omega^2$$

עוד קצת ארגון אלגברי יתן:

$$v_{cm} = \frac{\sqrt{2}I}{mL}\omega$$

$$0 = 6v_{cm}^2 - 4v_{cm}v_0 + \frac{I}{m}\omega^2$$

ועכשיו ניתן להציב את המהירות הזוויתית מהמשוואה הראשונה בשניה לקבלת:

$$6v_{cm}^2 - 4v_{cm}v_0 + \frac{I}{m}\left(\frac{mL}{\sqrt{2}I}v_{cm}\right)^2 = 0$$

$$v_{cm}\left(6v_{cm} + \frac{mL^2}{2I}v_{cm} - 4v_0\right) = 0$$

מומנט ההתמד של שני כדורים זהים במרחק L ביחס למרכז המסה שלהם הוא:

$$I = m\left(\frac{L}{2}\right)^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}mL^2$$

נציב את זה בביטוי שקיבלנו למהירות מרכז המסה:

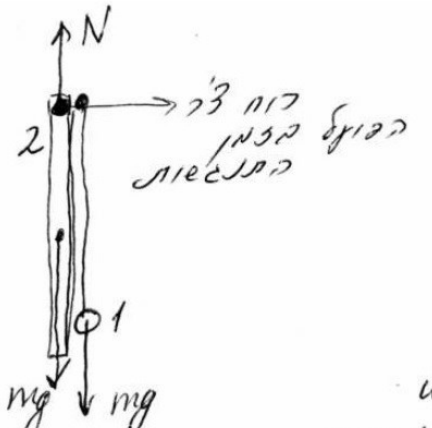
$$v_{cm}\left(6v_{cm} + \frac{mL^2}{2\cdot\frac{1}{2}mL^2}v_{cm} - 4v_0\right) = v_{cm}(7v_{cm} - 4v_0) = 0$$

מה שמשאיר שתי פתרונות. אחד הוא שמרכז המסה לא זז, והכדור נשאר במהירותו ההתחלתית, כלומר הוא בעצם חולף דרך הכדורים המחוברים. האופציה השניה (שבאמת מתארת התנגשות) היא ש:

$$v_{cm} = \frac{4}{7}v_0$$

$$\omega = \frac{mL}{\sqrt{2}I}v_{cm} = \frac{mL}{\sqrt{2}\frac{1}{2}mL^2}v_{cm} = \frac{2}{\sqrt{2}}\frac{v_{cm}}{L} = \frac{4}{7\sqrt{2}}\frac{v_0}{L}$$

$$u = v_0 - 2v_{cm} = v_0 - 2\cdot\frac{4}{7}v_0 = -\frac{1}{7}v_0$$



שימור אנרגיה

$$\frac{I_1 \omega_1^2}{2} = \frac{I_2 \omega_2^2}{2} \quad (1)$$

מהירות זוויתית — ω_1
הכדור רגע לפני התנגשות

מהירות זוויתית — ω_2
המוט רגע אחרי התנגשות

שימור תנע זוויתי

$$I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2 \quad (2)$$

מ- (1) ו- (2):

$$I_1 = I_2$$

$$\frac{mL^2}{3} = ml^2 \Rightarrow \boxed{l = \frac{L}{\sqrt{3}}}$$