נחשב את המהירות שחייבת להיות לכדור בהגיעו לשיא הגובה על מנת שישלים סיבוב. נעשה זאת באמצעות שיקולי כוחות. בנקודת שיא הגובה:

$$\sum F_y = 0 = m\frac{v^2}{R} - mg - N \rightarrow N = m\left(\frac{v^2}{R} - g\right)$$

סיבוב שלם יושלם אם בנקודה הזו הנורמאל יהיה גדול מאפס, ולכן:

$$N = m\left(\frac{v^2}{R} - g\right) > 0 \rightarrow v^2 > gR$$

כעת, נחפש גובה שחרור שיניב מהירות שכזו בנקודה הקריטית. שיקולי שימור אנרגיה נותנים:

$$mgH = mg2R + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

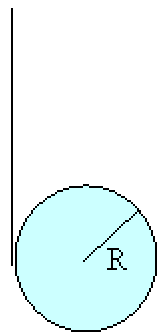
נשתמש בעובדה שאין החלקה כך ש- $\omega = v/r$ ונציב את מומנט ההתמד הנתון בבעיה:

$$mgH = 2mgR + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2\right)\left(\frac{v^2}{r^2}\right) = 2mgR + \frac{7}{10}mv^2$$

נבודד את המהירות ונדרוש את התנאי שקיבלנו מקודם:

$$v^2 = \frac{10g}{7}\left(H - 2R\right) > gR \rightarrow \boxed{H > \frac{27}{10}R}$$

פתרון תרגיל 6409 1:



משוואת כוחות:

$$\sum F_y = ma = mg - T$$

משוואת מומנטים סביב מרכז המסה (נבחר את כיוון השעון ככיוון חיובי):

$$\sum \tau = I\alpha = TR$$

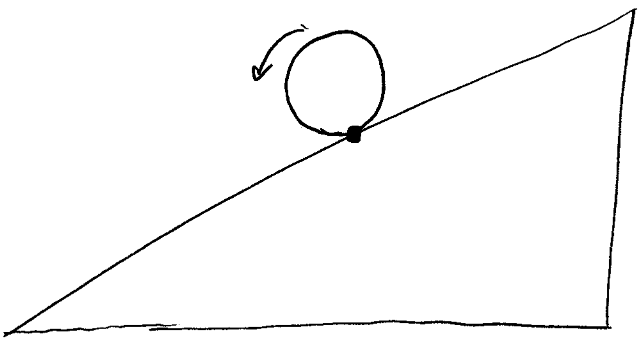
נפתור שתי משוואות בשני נעלמים, יחד עם הקשר $a = \alpha R$ הנובע מהעובדה שהיויו מתגלגל ללא החלקה ונקבל לבסוף:

$$\boxed{T = \frac{mgI}{I + mR^2}\,;\, a = \frac{mgR^2}{I + mR^2}}$$

פתרון 1_6412

המשמעות של גלגול ללא החלקה היא שנקודות המגע בין הדיסקה והמדרון אינה נעה על המדרון. נקודות המגע משתנה בכל רגע ורגע.

מכיוון שניתן להתייחס לתנועת הדיסקה בכל רגע ורגע כתנועה סיבובית סביב ציר שעובר בדיוק בנקודת המגע בין הדיסקה והמדרון.



מומנט התמד של דיסקה עבור ציר העובר דרך מרכז המסה הוא

$$I_{CM} = \frac{1}{2} m R^2$$

במקרה שלנו הציר עובר במרחק R ממרכז המסה, ולכן לפי חוק שטיינר

$$I = I_{CM} + MR^2 = \frac{1}{2} MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2} MR^2$$

הכח הפועל על הדיסקה בכיוון המקביל למדרון הינו $mg\sin\alpha$.

הכח פועל על כל אלמנט בנפרד, אך לצרכי חישוב המומנט שמפעיל כח הכובד נמצה אותו לכדי כח הפועל על מרכז המסה.

מכיוון שאורך הזרוע של כח הכבידה הינו R, ולכן המומנט הינו

$$\tau = Rmg\sin\alpha$$

ה. התאוצה הזוויתית α (לא להתבלבל עם הזווית α)
נתונה על ידי

$$\tau = I\alpha$$

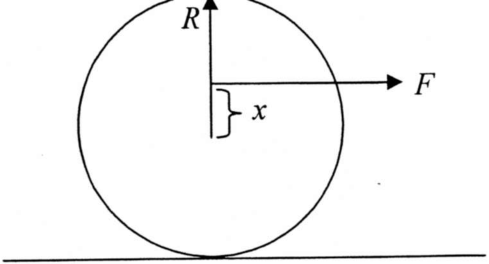
$$\Downarrow$$

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{MgR\sin\alpha}{\frac{3}{2}MR^2} = \frac{2}{3}\frac{g}{R}\sin\alpha$$

התאוצה המשיקית של מרכז המסה גם כאן ישר וישר מתקבל
ע"י הכפלת התאוצה הזוויתית במרחק בין ציר הסיבוב לבין
מרכז המסה, שהוא R. ולכן

$$a_{cm} = R\alpha = \frac{2}{3}g\sin\alpha$$

.5



נרשום משוואת כוחות ומומנטים בהנחה שהחיכוך בין הגליל למשטח התאפס:

$$\sum F_x = F = ma$$

$$\sum \tau = F \cdot x = I\alpha$$

$$I = \frac{1}{2}mR^2 \quad , \quad \alpha = \frac{a}{R}$$

$$F \cdot x = \frac{1}{2}mR^2 \cdot \frac{a}{R} \quad \rightarrow \quad ma \cdot x = \frac{1}{2}maR \quad \rightarrow \quad x = \frac{R}{2}$$

א), ב) <u>גליל חלול:</u>

$$MgH = \frac{I_{cm}\omega^2}{2} + \frac{MV_{cm}^2}{2}$$

$$I_{cm} = MR^2$$ גליל חלול:

$$V_{cm} = \omega R$$

$$MgH = \frac{MR^2 V_{cm}^2}{2R^2} + \frac{MV_{cm}^2}{2} = MV_{cm}^2$$

$$V_{cm} = \sqrt{gH} \qquad \omega = \frac{V_{cm}}{R} = \frac{\sqrt{gH}}{R}$$

ג)

$$E_{k0} = \frac{I_{cm}\omega^2}{2} + \frac{MV_{cm}^2}{2}$$

$$E_f = \frac{I_{cm}\omega^2}{2} + Mgh_{max}$$

$$\frac{I_{cm}\omega^2}{2} + \frac{MV_{cm}^2}{2} = \frac{I_{cm}\omega^2}{2} + Mgh_{max}$$

$$V_{cm}^2 = 2gh_{max}$$

$$h_{max} = \frac{V_{cm}^2}{2g} = \frac{H}{2}$$

<u>גליל מלא:</u>

$$I_{cm} = \frac{MR^2}{2}, \qquad V_{cm} = \sqrt{\frac{4}{3}gH}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{4gH}{3R^2}}$$

$$h_{max} = \frac{2}{3}H$$