

תרגול 9 – כוחות: חיכוך ותנועה מעגלית

תרגיל 1 <1 3410>

מכיוון שהדרישה היא שמסה לא יזוזו אחת ביחס לשניה, נעבוד במערכת המנוחה של מסה 2, שהיא מערכת לא אינרציאלית, כלומר שצריך להוסיף כוח מדומה.

נקבע את הצירים זהה לשני הגופים: x ימינה וy למעלה ונדרוש שלא תהיה תנועה יחסית, כלומר התאוצה היא 0. את החיכוך נקבע לכיוון ימינה למטה על מסה 1 והפוך על מסה 2, ונתייחס למקרה ההפוך.

משוואות הכוחות הן:

מסה 1:

$$f_s \cos \alpha + N_1 \sin \alpha - M_1 A = 0$$

$$-f_s \sin \alpha - M_1 g + N_1 \cos \alpha = 0$$

מסה 2:

$$F - N_1 \sin \alpha - f \cos \alpha - M_2 A = 0$$

$$N_2 - M_2 g - N_1 \cos \alpha + f_s \sin \alpha = 0$$

א. עבור $f_s = 0$, מחיבור של שתי המשוואות בציר x נקבל

$$F = (M_1 + M_2)A$$

מהמשוואה על ציר y של מסה 1 נקבל

$$N_1 = \frac{M_1 g}{\cos \alpha}$$

כך ש

$$M_1 A = \frac{M_1 g \sin \alpha}{\cos \alpha} \rightarrow A = g \tan \alpha$$

לכן הכוח שיופעל הוא

$$F = (M_1 + M_2)g \tan \alpha$$

ב. כעת יש חיכוך והכוח המינימלי והמקסימלי יתקיים כאשר החיכוך יהיה שווה לחיכוך הסטטי המקסימלי

ימינה ושמאלה. עבור $f_{s,max} = \mu_s N_1$

$$\mu_s N_1 \cos \alpha + N_1 \sin \alpha - M_1 A = 0$$

$$-\mu_s N_1 \sin \alpha - M_1 g + N_1 \cos \alpha = 0$$

$$F - N_1 \sin \alpha - \mu_s N_1 \cos \alpha - M_2 A = 0$$

מהמשוואה השנייה

$$M_1 g = N_1 (\cos \alpha - \mu_s \sin \alpha) \rightarrow N_1 = \frac{M_1 g}{\cos \alpha - \mu_s \sin \alpha}$$

נציב במשוואה הראשונה

$$M_1 A = N_1 (\mu_s \cos \alpha + \sin \alpha) = \frac{M_1 g (\mu_s \cos \alpha + \sin \alpha)}{\cos \alpha - \mu_s \sin \alpha} \rightarrow A = \frac{g (\sin \alpha + \mu_s \cos \alpha)}{\cos \alpha - \mu_s \sin \alpha}$$

ומחיבור בין המשוואות הראשונה והשלישית נקבל

$$F = (M_1 + M_2)A = g(M_1 + M_2) \frac{(\sin \alpha + \mu_s \cos \alpha)}{\cos \alpha - \mu_s \sin \alpha}$$

עבור המקרה בו החיכוך הוא בכיוון ההפוך, נקבל

$$F = (M_1 + M_2)A = g(M_1 + M_2) \frac{(\sin \alpha - \mu_s \cos \alpha)}{\cos \alpha + \mu_s \sin \alpha}$$

ניתן לראות שהכוח הראשון גדול מהשני, לכן זהו הכוח המקסימלי והשני הוא המינימלי.

תרגיל 2 <3502> 1

א. עבור קשת שהרדיוס שלה הוא R, נבדוק מהי התאוצה הרדיאלית, ונדרוש שהיא תהיה קטנה מ-0.05g.

$$a_r = \frac{v^2}{R} \leq 0.05g$$

$$R \geq \frac{v^2}{0.05g} = \frac{\left(\frac{310 \frac{km}{h} \cdot 1000 \frac{m}{km}}{3600 \frac{s}{h}}\right)^2}{0.05 \cdot 9.8 \frac{m}{s^2}} \approx 15000 m = 15 km$$

ב. כאשר בונים את המסילה בשיפוע, נצטרך לפרק את הכוחות לרכיבים. נקבע את מערכת הצירים x שמאלה ועל למעלה ונבדוק את המקרה שהחיכוך פועל שמאלה. משוואות הכוחות הן:

$$\sum F_x = N \sin \alpha + f \cos \alpha = ma_r = \frac{mv^2}{R}$$

$$\sum F_y = N \cos \alpha - mg - f \sin \alpha = 0$$

עבור החיכוך הסטטי המקסימלי

$$N(\sin \alpha + \mu_s \cos \alpha) = \frac{mv^2}{R}$$

$$N(\cos \alpha - \mu_s \sin \alpha) = mg$$

נחלק את שתי המשוואות

$$\frac{g}{\frac{v^2}{R}} = \frac{\cos \alpha - \mu_s \sin \alpha}{\sin \alpha + \mu_s \cos \alpha} = \frac{\cos \alpha (1 - \mu_s \tan \alpha)}{\tan \alpha + \mu_s}$$

$$\frac{v^2}{gR} (1 - \mu_s \tan \alpha) = \tan \alpha + \mu_s$$

$$\tan \alpha = \frac{\frac{v^2}{gR} - \mu_s}{\mu_s \frac{v^2}{gR} + 1}$$

אם נציב את הנתונים נקבל

$$\tan \alpha_1 \approx -0.31$$

אם ניקח את מקדם החיכוך הסטטי $-\mu_s \rightarrow \mu_s$ נקבל

$$\tan \alpha_2 = \frac{\frac{v^2}{gR} + \mu_s}{-\mu_s \frac{v^2}{gR} + 1} \approx 1$$

ניתן לראות שהזווית $\alpha = 0$ נכללת בתחום הזוויות. עבור פרמטרים אחרים (שינוי לדוגמה של μ_s), אפשר להגיע למצב שבו על מנת למנוע החלקה, חייבים לבנות את המסילה בשיפוע.

תרגיל 3 <1 3501>

אם המסה התלויה היא במנוחה, משוואת הכוחות עליה היא פשוטה.

$$T - Mg = 0 \rightarrow T = Mg$$

עבור המסה המסתובבת, נדרוש שהתאוצה תהיה רדיאלית, והכוח היחיד המופעל עליה הוא המתוחות, כך ש

$$T = m\omega^2 r$$

כאשר r הוא אורך החוט מהחוט עד למסה המסתובבת. אם נציב את המשוואה הראשונה בשנייה ונבודד את המהירות הזוויתית

$$\omega = \sqrt{\frac{Mg}{mr}}$$

כך שהמהירות המשיקית תהיה

$$v = \omega r = \sqrt{\frac{Mgr}{m}}$$

אפשר לראות שבהקטנת r המהירות הזוויתית תגדל, אבל המהירות המשיקית תגדל.