תרגול 5 – תנועה בשני מימדים ושלושה מימדים

תרגיל 0 <1_2200>

מהירות הכדור $\left[\frac{m}{s}\right]$ 25.3 בזווית $\theta = 42^\circ$ מעל האופק. הקיר נמצא במרחק $x = 21.8\ [m]$

א. נפרק לתנועה בציר x, משוואת התנועה:

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

אנחנו יודעים שבציר x אין תאוצה, ונגדיר את ראשית הצירים כך ש:

$$x_0 = 0, a_x = 0$$
$$v_{0x} = v_0 \cos\theta$$

לפי המשוואה המיקום נוכל למצוא את זמן הפגיעה:

$$x(t_h) = L = 0 + v_0 \cos\theta\, t_h + 0$$
$$t_h = \frac{L}{v_0 \cos\theta} = \frac{21.8}{25.3 \cos 42^\circ} = 1.16\ s$$

ב. בציר y משוואת התנועה:

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

כאשר התאוצה והמהירות ההתחלתית ידועות ונגדיר את מערכת הצירים כך ש:

$$y_0 = 0, v_{0y} = v_0 \sin\theta\,, a_y = -g$$

גובה הפגיעה לפי המשוואה:

$$y(t_h) = v_0 \sin\theta\, t_h - \frac{1}{2}g t_h^2 = 25.3 \sin 42^\circ\, 1.16 - \frac{1}{2}9.8(1.16)^2 = 13.04\ m$$

ג. וקטור המהירות בזמן הפגיעה:

$$\vec{v}(t) = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} = (v_{0x} + a_x t)\hat{\imath} + \left(v_{0y} + a_y t\right)\hat{\jmath} = (v_0 \cos\theta)\hat{\imath} + (v_0 \sin\theta - gt)\hat{\jmath}$$
$$\vec{v}(t = 1.16\ s) = 18.8\ \left[\frac{m}{s}\right]\hat{\imath} + 5.56\left[\frac{m}{s}\right]\hat{\jmath}$$

ד. $v_y(t_h) = 5.56\left[\frac{m}{s}\right] > 0$ המהירות היא חיובית (כלפי מעלה), כלומר שהכדור עוד לא עבר את נקודת שיא הגובה.

תרגיל 1 <1_2238>

נתונים מהירות הזריקה v_1 וזווית הזריקה φ_1 של האבן הראשונה. לאבן השנייה יש מהירות התחלתית v_2 בכיוון ציר y. $y_{0,1} = 0, x_{0,1} = 0$ $y_{0,2} = 0, x_{0,2} = L$

התנאי למפגש של שתי האבנים הוא שהן יהיו באותו מקום (וקטורי, כלומר בכל אחד מהצירים) באותו זמן.

באופן כללי, עבור משוואות התנועה בשני צירים בתנועה בליסטית ותנאי ההתחלה הנ"ל:

$$x(t) = v_1 \cos\varphi_1 t \to t = \frac{x}{v_1 \cos\varphi_1}$$

$$y(t) = v_1 \sin\varphi_1 t - \frac{g}{2} t^2$$

$$y(x) = \frac{v_1 \sin\varphi_1 x}{v_1 \cos\varphi_1} - \frac{g}{2}\frac{x^2}{v_1^2 \cos^2\varphi_1} = x \tan\varphi_! - \frac{g}{2}\frac{x^2}{v_1^2 \cos^2\varphi_1}$$

נמצא את הזמן של האבן הראשונה עבור המיקום האופקי $x_1(t) = L$

$$t_1 = \frac{L}{v_1 \cos\varphi_1}$$

נמצא את המיקום האנכי של האבן הראשונה כאשר היא מגיעה למיקום האופקי L:

$$y(L) = L \tan\varphi_! - \frac{g}{2}\frac{L^2}{v_1^2 \cos^2\varphi_1}$$

נחשב את המיקום של האבן השנייה בזמן t_1 ונשווה למיקומה האנכי של האבן הראשונה (המיקומים האופקיים זהים מעצם הדרישה $y(L)$):

$$y_2(t_1) = v_2 t_1 - \frac{g}{2} t_1^2 = \frac{v_2 L}{v_1 \cos\varphi_1} - \frac{g}{2}\frac{L^2}{v_1^2 \cos^2\varphi_1} = L \tan\varphi_! - \frac{g}{2}\frac{L^2}{v_1^2 \cos^2\varphi_1}$$

כלומר קיבלנו ש

$$\frac{v_2 L}{v_1 \cos\varphi_1} = L \tan\varphi_! \to v_2 = v_1 \sin\varphi_1$$

משמעות התוצאה – המהירויות האנכיות צריכות להיות שוות על מנת שהאבנים יתנגשו.

<u>תרגיל 2 <2204_1></u>

נתון:

$$h = 4.9\ m$$

$$v(x = h) = 0$$

$$v_0 = 10.8 \frac{m}{s}$$

$$v_{trail} = 9.1 \frac{m}{s}$$

הזמן שלוקח לכדור להגיע לשיא הגובה (רק בשיא הגובה, מהירותו תהיה אופקית):

$$v_y(t) = v_{0y} + at$$

$$a = -g, v\left(t_p\right) = 0\ v_{0y} = v_0 \sin\theta$$

$$t_p = \frac{v_0 \sin\theta}{g}$$

משוואת התנועה בציר y:

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}at^2$$

$$y_0 = 0, y = h, v_{0y} = v_0 \sin\theta\,, a = -g$$

$$h = v_0 \sin\theta \left(\frac{v_0 \sin\theta}{g}\right) - \frac{g}{2}\left(\frac{v_0 \sin\theta}{g}\right)^2 = \frac{(v_0 \sin\theta)^2}{2g} \to \sin\theta = \sqrt{\frac{2gh}{v_0^2}}$$

כעת נשתמש במשוואת התנועה בציר x כדי לקבל את המרחק האופקי:

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}at^2$$

$$x_0 = 0, a = 0, v_{0x} = v_{trail} + v_0 \cos\theta$$

$$x(t_1) = (v_{trail} + v_0 \cos\theta)\left(\frac{v_0 \sin\theta}{g}\right) = \left(v_{trail} + v_0\sqrt{1 - \frac{2gh}{v_0^2}}\right)\sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 13.64\ m$$

תרגיל 3 <1_2201>

אפשר לחלק את המהירות לרכיב בציר x ובציר y, כך ש$v^2 = v_x^2 + v_y^2$

רכיב התנועה בציר x הוא תנועה במהירות קבועה, כך ש$v_x = v_0 \cos\theta$.

בציר y פועל כח הכובד, כך ש $v_y = v_0 \sin\theta - gt$

נחלק את התנועה לשניים – תנועה מגובה h עד גובה h (פרבולית) ותנועה מגובה h עד הפגיעה בקרקע.

בסוף החלק הראשון המהירות הסופית בציר y היא $v_y = v_0 \sin\theta - gt$

המיקום האנכי בסוף החלק הראשון הוא h ולפי הנוסחא:

$$y = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$h = h + v_0 \sin\theta\, t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 \rightarrow t_1 = \frac{2 v_0 \sin\theta}{g}$$

והמהירות בסוף החלק הראשון בציר y היא

$$v_y(t_1) = v_0 \sin\theta - g\left(\frac{2 v_0 \sin\theta}{g}\right) = -v_0 \sin\theta$$

בחלק השני, המהירות ההתחלתית בציר y היא המהירות הסופית של החלק הראשון.

נמצא את זמן t_2 הפגיעה בקרקע

$$0 = h - v_0 \sin\theta\, t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2 \rightarrow t_2^2 + \frac{2 v_0 \sin\theta}{g} t_2 - \frac{2h}{g} = 0 \rightarrow t_2^{1,2} = \frac{-\frac{2 v_0 \sin\theta}{g} \pm \sqrt{\frac{4 v_0^2 \sin^2\theta}{g^2} + \frac{8h}{g}}}{2}$$

ניקח רק את הפתרון החיובי (זמן לא יכול להיות שלילי).

המהירות הסופית בציר y בזמן הפגיעה היא.

$$v_y = -v_0 \sin\theta - g\left(-\frac{v_0 \sin\theta}{g} \pm \sqrt{\frac{v_0^2 \sin^2\theta}{g^2} + \frac{2h}{g}}\right) = \pm\sqrt{v_0^2 \sin^2\theta + 2gh}$$

בציר הא המהירות היא קבועה, לכן $v_x(t_2) = v_x(0) = v_0 \cos\theta$

כך שהמהירות הסופית $v^2 = v_0^2 \cos^2\theta + v_0^2 \sin^2\theta + 2gh = v_0^2 + 2gh$

כלומר גודל המהירות הסופית לא תלוי בθ.