תרגול 3 : וקטורים

וקטור – גודל פיזיקלי בעל גודל וכיוון

בניגוד לסקלאר, שהוא גודל פיזיקלי ללא כיוון, רק גודל.

ב2D –

סימון:

$$\vec{a} = a_x\hat{x} + a_y\hat{y} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} = \left(a_x, a_y\right)$$

גודל הוקטור:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

זווית:

$$\tan\theta = \frac{a_y}{a_x}$$

ב3D –

סימון

$$\vec{a} = a_x\hat{x} + a_y\hat{y} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k} = \left(a_x, a_y, a_z\right)$$

גודל:

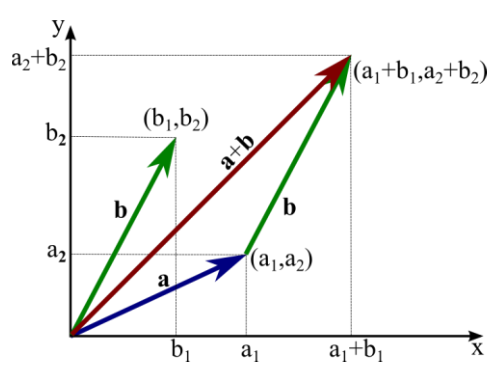
$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

פעולות עם וקטורים:

חיבור:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\hat{x} + \left(a_y + b_y\right)\hat{y} + (a_z + b_z)\hat{z}$$

גרפית:



מכפלה סקלארית:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sum_{i=x}^{z}a_ib_i=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta_{ab}$$

כאשר θ_{ab} היא הזווית בין הוקטורים.

מתי מכפלה סקלארית היא 0?

וקטור יחידה:

וקטור $\hat{a}$ הוא וקטור שגודלו 1 וכיוונו בכיוון $\vec{a}$

$$\hat{a}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\rightarrow\vec{a}=|\vec{a}|\hat{a}$$

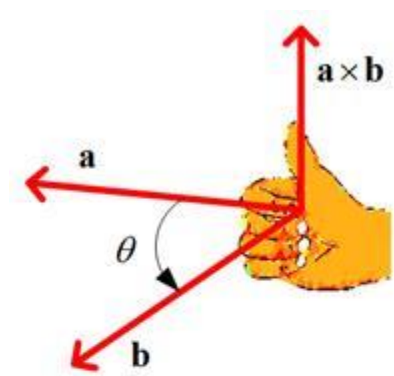
מכפלה וקטורית:

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\left(a_yb_z-a_zb_y\right)\hat{x}+\left(a_xb_z-a_zb_x\right)\hat{y}+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)\hat{z}$$

הגודל

$$|\vec{c}|=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta_{ab}$$

ניתן לראות ש$\vec{a}\times\vec{a}=0$, ו$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$



<u>תרגיל 1 <1_1402></u>

נתונים הוקטור $\vec{v}$ ו$\vec{w}$ עם הנורמות $|\vec{v}| = v$ ו$|\vec{w}| = w$. הזווית בין $\vec{v}$ ל$\vec{w}$ היא ϕ.

א. נורמה של וקטור היא שורש המכפלה הסקלארית של עם עצמו:

$$|\vec{v}-\vec{w}| = \sqrt{(\vec{v}-\vec{w})\cdot(\vec{v}-\vec{w})} = \sqrt{v^2 - 2\vec{v}\cdot\vec{w} + w^2} = \sqrt{v^2 + w^2 - 2vw\cos\phi}$$

ב. נניח שהזווית היא ψ:

$$\vec{v}\cdot(\vec{v}-\vec{w}) = v|\vec{v}-\vec{w}|\cos\psi$$

$$\cos\psi = \frac{\vec{v}\cdot(\vec{v}-\vec{w})}{v|\vec{v}-\vec{w}|} = \frac{v^2 - vw\cos\phi}{v\sqrt{v^2+w^2-2vw\cos\phi}}$$

תרגיל 2 <1_1403>

נתון $\vec{V_1},\vec{V_2},\vec{V_3}$ כך ש$\vec{V_1}+\vec{V_2}+\vec{V_3}=0$.

א. צ"ל $\vec{V_1}\times\vec{V_2}=\vec{V_2}\times\vec{V_3}=\vec{V_3}\times\vec{V_1}$

הוכחה:

אם נשתמש בנתון: $\vec{V_2}=-\vec{V_1}-\vec{V_3}$

$$\vec{V_2}\times\vec{V_3}=\left(-\vec{V_1}-\vec{V_3}\right)\times\vec{V_3}=-\vec{V_1}\times\vec{V_3}-\vec{V_3}\times\vec{V_3}=\vec{V_3}\times\vec{V_1}$$

אם נשתמש ב$\vec{V_1}=-\vec{V_2}-\vec{V_3}$

$$\vec{V_1}\times\vec{V_2}=\left(-\vec{V_2}-\vec{V_3}\right)\times\vec{V_2}=-\vec{V_3}\times\vec{V_2}=\vec{V_2}\times\vec{V_3}$$

ב.

$$\left|\vec{V_1}\times\vec{V_2}\right|=\left|\vec{V_3}\times\vec{V_1}\right|\to V_1V_2\sin\theta_{12}=V_3V_1\sin\theta_{31}$$

$$\frac{V_2}{\sin\theta_{31}}=\frac{V_3}{\sin\theta_{12}}$$

באותה צורה נקבל את הקשר השני.

תרגיל 3 <1_2111>

מיקום החלקיק על ציר z נתון לפי $z(t) = \alpha t e^{-\beta t}$.

א. כלל חשוב: בפונקציה אקספוננציאלית, טריגונומטרית ולוגריתמית, הארגומנט חייב להיות חסר יחידות.

לכן

$$[\beta t] = 1 \rightarrow [\beta] = \frac{1}{s}$$

ל $z(t)$ יש יחיד של מרחק, לכן

$$[z(t)] = [\alpha t] = m \rightarrow [\alpha] = \frac{m}{s}$$

ב. חלקיק עוצר , משמעותו מהירות אפס.

$$v(t) = \left(\frac{dz(t)}{dt}\right)_{t=t_s} = 0 = \alpha e^{-\beta t_s} - \alpha\beta t_s e^{-\beta t_s}$$

$$\alpha e^{-\beta t_s} = \alpha\beta t_s e^{-\beta t_s}$$

$$t_s = \frac{1}{\beta}$$

ג.

$$z(t_s) = \alpha t_s e_s^{-\beta t_s} = \frac{\alpha}{\beta} e^{-1}$$

קיים פתרון נוסף עבור $t \rightarrow \infty$.