תרגול 14 – גוף קשיח 2

את הקשר בין מומנטי הכוח לסיבוב ראינו בתרגול הקודם – עבור ציר סיבוב סביב נקודה o:

$$\sum \vec{\tau}_O = I_O \vec{\alpha}_O$$

סך מומנטי הכוח שפועלים על גוף מסוים שווים לכמה הגוף מתנגד לסיבוב (מומנט האינרציה) מוכפל בכמה הוא משנה את מהירות הסיבוב (תאוצה זוויתית היא השינוי בזמן של המהירות הזוויתית.

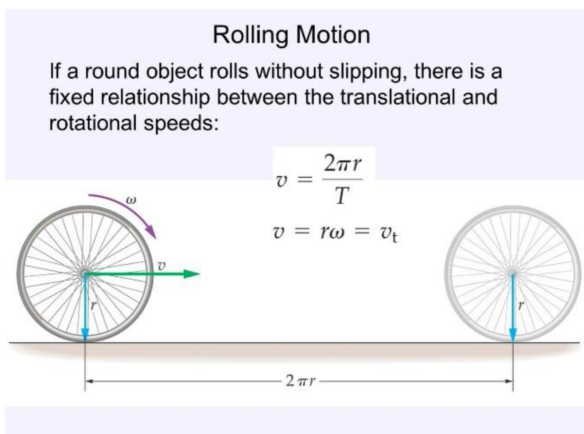
ראינו בשיעור הקודם של מומנט ההתמד (אינרציה) סביב ציר מסוים:

$$I_O = \sum_i m_i r_i^2$$

וכמובן קיימת גם הצורה האינטגרלית שלו.

גלגול ללא החלקה

עבור גוף שמבצע גלגול ללא החלקה,



נניח שנרצה למצוא את המרחק שמרכז המסה עבר x_{cm}, במקרה של גלגול ללא החלקה, הוא שווה בדיוק לקשת שנוצרה

$$x_{cm} = \varphi R$$

כאשר R הוא רדיוס הגוף

אם גוזרים את הביטוי נקבל:

$$v_{cm} = \omega R$$

v_{cm} הוא המהירות הקווית של מרכז המסה, ω הוא המהירות הזוויתית

$$a_{cm} = R\alpha$$

α היא התאוצה הזוויתית של הגוף

אנרגיה קינטית סיבובית

אנרגיה קינטית של גופים מסתובבים מוגדרת

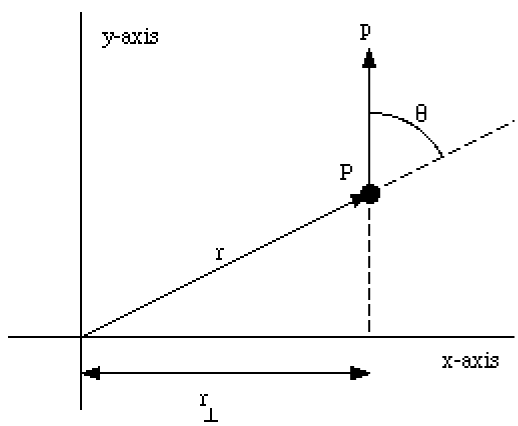
$$K = \frac{1}{2} I\omega^2$$

אנרגיה של גוף מתגלגל ללא החלקה, כאשר ציר הסיבוב הוא נקודת מגע עם הקרקע ניתן לכתוב (לפני משפט הצירים המקבילים)

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2}(I_{cm} + MR^2)\omega^2 = \frac{1}{2} I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2} M(R\omega)^2 = \frac{1}{2} I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2} Mv_{cm}^2$$

האנרגיה הקינטית של גוף כוללת את האנרגיה של תנועה קווית של מרכז המסה ואת האנרגיה של סיבוב סביב ציר בנקודת מרכז המסה – זוהי אנרגיית הסיבוב של הגוף.

תנע זוויתי



$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$l = rp \sin\theta = rmv \sin\theta$$

תנע כוללת של מערכת חלקיקים

$$\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \cdots \vec{l}_N$$

תנע זוויתי של גוף קשיח שמסתובב סביב ציר קבוע:

$$L = I\omega$$

כאשר התנע הזוויתי מקביל לציר הסיבוב.

הקשר בין מומנט כוח לתנע זוויתי

$$\sum \tau_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

שימור תנע זוויתי

אם $\sum \tau_{ext} = 0$, התנע הזוויתי הכולל נשמר

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f$$

הקבלה בין תנועה קווית וסיבובית

כוח F	מומנט כוח τ
מסה m	מומנט התמד I
מהירות v	מהירות זוויתית ω
תאוצה a	תאוצה זוויתית α
תנע p	תנע זוויתי l
$\sum F = ma$	$\sum \tau = I\alpha$
$K = \frac{1}{2}mv^2$	$K = \frac{1}{2}I\omega^2$
$\sum F = \frac{d\vec{p}}{dt}$	$\sum F = \frac{d\vec{L}}{dt}$

תרגיל 1 <1_6403>

עבור מערכת שמתחילה ממנוחה (הנחה), יש שימור אנרגיה

נגדיר את 0 הפוטנציאל בגובה 0, כך שבמצב ההתחלתי יש רק אנרגיה פוטנציאלית

$$MgH = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2$$

החבל אינו מחליק, לכן אפשר לכתוב:

$$v = \omega_1 R_1 = \omega_2 R_2$$

כך ש

$$MgH = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I_1\frac{v^2}{R_1^2} + \frac{1}{2}I_2\frac{v^2}{R_2^2} = \frac{1}{2}v^2\left(M + \frac{I_1}{R_1^2} + \frac{I_2}{R_2^2}\right)$$

$$v^2 = \frac{2MgH}{M + \frac{I_1}{R_1^2} + \frac{I_2}{R_2^2}}$$

נשאר רק לכתוב את מומנטי האינרציה של הכדור והגליל סביב הציר הראשי

$$I_1 = \frac{2}{5}m_1R_1^2$$

$$I_2 = \frac{1}{2}m_2R_2^2$$

לכן

$$v^2 = \frac{2MgH}{M + \frac{2}{5}m_1 + \frac{1}{2}m_2}$$

תרגיל 2 <6601_1>

א. אין כוחות חיצוניים, לכן מהירות מרכז המסה לא תשתנה ותישאר 0. לכן, המחליקות ינועו סיבב מרכז המסה שלהן. אין מומנטי כוח חיצוניים ולכן התנע הזוויתי הכולל יישמר:

$$R = \frac{3L}{2}$$

משימור תנע זוויתי

$$L_i = MvR + MvR$$
$$L_f = I\omega$$
$$2MRv = I\omega$$

מומנט ההתמד מורכב משתי המסות של המחליקות ולכן:

$$I = MR^2 + MR^2 = 2MR^2$$
$$\omega = \frac{2MvR}{I} = \frac{2MvR}{2MR^2} = \frac{v}{R} = \frac{2v}{3L}$$

ב. האנרגיה הקינטית הסיבובית:

$$\mathrm{K} = \frac{1}{2}I\omega = \frac{1}{2}2MR^2\frac{v^2}{R^2} = Mv^2$$

ג. התנע הזוויתי נשמר, והרדיוס החדש הוא $R' = \frac{L}{2}$

לכן

$$I\omega = I'\omega'$$
$$I' = MR'^2 + MR'^2 = 2MR'^2$$
$$\omega' = \frac{I}{I'}\omega = \frac{2MR^2}{2MR'^2}\frac{v}{R} = \frac{R}{R'^2}v = \frac{6v}{L}$$

ד.

$$K' = \frac{1}{2}I'\omega'^2 = \frac{1}{2}mR'^2\frac{R^2}{R'^4}v^2 = M\frac{R^2}{R'^2}v^2 = 9Mv^2$$

ה. המחליקות ביצעו עבודה והמירו אנרגיה פנימית של $8Mv^2$ לאנרגיה קינטית.

שאלה 3 <1_6702>

יש שימור של אנרגיה, בהתחלה קיימת רק אנרגיה פוטנציאלית כי הגופים מתחילים ממנוחה, בסוף יש רק אנרגיה קינטית המורכבת מתנועת מרכז מסה וסיבוב:

$$mgh = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2$$

עבור גלגול ללא החלקה

$$v_{cm} = \omega R = v$$

לכן

$$mgh = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \frac{v^2}{R^2}$$

$$v^2 \left(m + \frac{I_{cm}}{R^2} \right) = 2mgh$$

$$v^2 = \frac{2mgh}{m + \frac{I_{cm}}{R^2}}$$

עבור גליל מלא:

$$I_{cm} = \frac{1}{2} m R^2$$

$$v^2 = \frac{2mgh}{m + \frac{\frac{1}{2} m R^2}{R^2}} = \frac{2mgh}{m + \frac{1}{2} m} = \frac{4}{3} gh$$

עבור גלילי חלול:

$$I_{cm} = m R^2$$

$$v^2 = \frac{2mgh}{m + \frac{m R^2}{R^2}} = \frac{2mgh}{2m} = gh$$