תרגול 13 – גוף קשיח 1

מרכז מסה עבור מערכת רציפה:

הסכום הופך לאינטגרל

$$\vec{R}_{cm} = \frac{1}{M}\sum_i (dm_i)\vec{r}_i \to \frac{1}{M}\int \vec{r}dm = \frac{1}{M}\int_V \rho\vec{r}dV$$

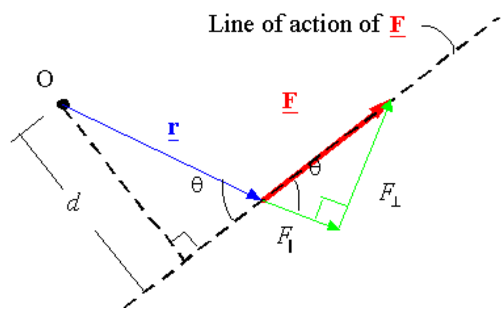
$$dm = \begin{cases} \lambda dl\ ,1D \\ \sigma ds\ ,2D \\ \rho dV\ ,3D \end{cases}$$

$$M_{tot} = \int dm = \int_V \rho\, dV$$

עד עכשיו עבדנו עם גופים נקודתיים. אבל בעבודה עם גופים כאלה אנחנו לא מתייחסים לאפשרות של הגוף להסתובב. לכן נעבור לגוף קשיח – גוף לא נקודתי שאינו משנה את הצורה שלו.

מומנט כוח: כוח יכול לגרום לגוף לתאוצה אבל יכול גם לגרום לגוף לסיבוב. הגדרת מומנט הכוח

$$\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F} = \vec{r}_\perp \times \vec{F} = \vec{r}\times\vec{F}_\perp$$



שימו לב שאנחנו צריכים לקבוע את ציר הסיבוב O.

$$|\vec{\tau}| = rF\sin\theta$$

זהו מומנט הכוח – המקביל לכוח בהקשר של סיבוב. כעת נרצה להקביל את החוק השני של ניוטון עבור סיבוב.

$$\sum \vec{\tau}_O = I_O\vec{\alpha}_O$$

כאשר I_O הוא מומנט ההתמד סביב הנקודה O ו$\vec{\alpha}_O$ הוא התאוצה הזוויתית סביב אותה נקודה.

כל הגורמים במשוואה הנ"ל תלויים בציר הסיבוב. חשוב להגדיר עבור כל משוואה מהו הציר הנבחר.

מומנט התמד:

לפי ההגדרה הנ"ל הוא הקשר בין סך מומנטי הכוח שמופעלים על גוף לבין התאוצה הזוויתית עבור ציר סיבוב ספציפי. אפשר גם לחשוב על מומנט אינרציה כמקביל למסה עבור סיבוב.

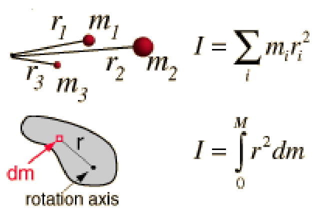
במערכת בדידה:

$$I = \sum_i m_i(\vec{r}_i)^2$$

ובמערכת רציפה

$$I = \int r^2 dm$$

כאשר r, r_i הם המרחקים של כל יחידת מסה מציר הסיבוב.



משפט הצירים המקבילים (שטיינר)

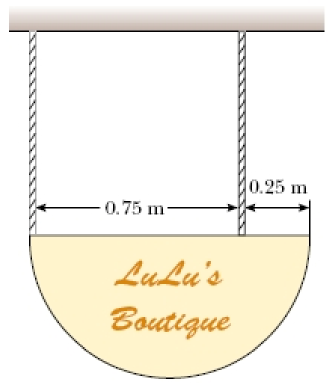
$$I = I_{cm} + Mh^2$$

I מומנט ההתמד סביב ציר סיבוב מסוים שווה למומנט ההתמד I_{cm} סביב ציר מקביל שעובר דרך מרכז המסה מוזז במסה הכוללת של הגוף M מוכפלת במרחק האנכי בין הצירים h בריבוע.

דגשים בתרגילים עם מומנט כוח והתמד

- בחירת ציר הסיבוב יכולה להקל על החשבון - אם מגדירים את ציר הסיבוב בנקודה שבה הכוח פועל, מומנט הכוח יהיה 0.
- כאשר מחשבים את גודל מומנט הכוח, חשוב לשים לב מהי הזווית בין הזרוע r לכוח F. בשביל למצוא אותה, עדיף להעתיק את אחד הווקטורים כך ששניהם יצאו מאותה נקודה.
- כאשר עובדים עם הגודל של τ, חשוב להוסיף סימן – חיובי אם הוא גורם לסיבוב נגד כיוון השעון ושלילי אם הוא גורם לסיבוב עם כיוון השעון.
- כאשר מחשבים מומנט התמד, שימו לב שהמרחק r הוא מציר הסיבוב ולא מנקודה. לדוגמא בגליל חלול שמסתובב סביב הציר הארוך שלו, המרחק של כל נקודה על הגליל מציר הסיבוב היא R רדיוס הגליל.
- בגוף קשיח המשקל מתייחסים למשקל ככוח שפועל על מרכז המסה.

תרגיל 1 <1_6101>



נתון:

$$L = 1m \rightarrow R = \frac{L}{2} = 0.5\,m$$

m- מסה

נחשב את מרכז המסה של השלט:

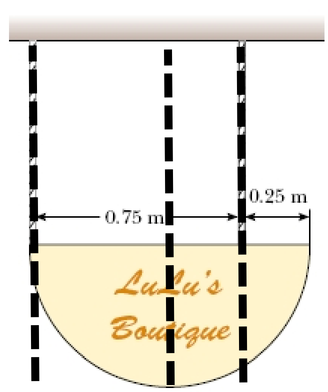
$$\vec{R}_{cm} = \frac{1}{m}\int \vec{r}dm = \frac{\sigma}{m}\int \vec{r}dA = \frac{m}{\frac{\pi R^2}{2}m}\int (r\cos(\phi)\,\hat{x} + r\sin(\phi)\,\hat{y})rdrd\phi =$$

$$= \frac{2}{\pi R^2}\int_0^R r^2dr\int_\pi^{2\pi}(\cos\phi\,\hat{x} + \sin\phi\,\hat{y})d\phi = \frac{2R^3}{3\pi R^2}(\sin\phi\,\hat{x} - \cos\phi\,\hat{y})_\pi^{2\pi} = -\frac{4R}{3\pi}\hat{y} = -\frac{2L}{3\pi}\hat{y}$$

במערכת אין תנועה קווית ואין תנועה סיבובית. נקבע את כיוון הצירים – קווית y הוא כלפי מעלה, וסיבוב נגד כיוון השעון הוא חיובי, ונקבע את הציר במרכז המסה, כך שהמומנט שהמשקל מייצר הוא 0. לכן:

$$\sum F_y = 0 \rightarrow T_1 + T_2 - mg = 0$$

כדי להקל על החשבון של הזרוע של כל אחד מהמומנטים ניתן לצייר קו מקביל למתיחויות שעובר דרך מרכז המסה, ולהמשיך את כל אחד מהקווים של המתיחויות. המרחק בין המקבילים הוא הזרוע בהתאמה



$$\sum \tau = 0 \rightarrow T_2 \frac{R}{2} - T_1 R = 0$$

$$T_2 = 2T_1$$

אם נציב את T_2 במשוואת הכוחות נקבל

$$3T_1 = mg \rightarrow T_1 = \frac{mg}{3}$$

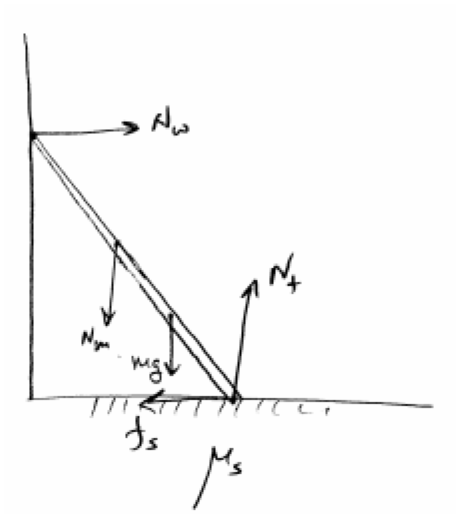
$$T_2 = \frac{2mg}{3}$$

שאלה 2 <1_6303>

בשאלה יש סולם שנשען על הקיר.

נתונים: אורך הסולם L, מסת הסולם m, גובה הקצה העליון של הסולם h, מסת האדם M ומקדם החיכוך הסטטי בין הסולם והרצפה.

א. נגדיר את הכוחות



N_w- הכוח הנורמלי מהקיר על הסולם.

N_F- הכוח הנורמלי מהרצפה.

N_m- הכוח הנורמלי שהאדם מפעיל על הסולם

f_s – כוח החיכוך הסטטי מהרצפה.

בנוסף קיים כוח הכבידה mg.

ב. על מנת שלא תהיה תנועה של הסולם, סך הכוחות והמומנטים צריך להיות 0.

כאשר אדם נמצא על הסולם, סך הכוחות עליו הוא 0, כלומר

$$N_m = Mg$$

נדרוש שסך הכוחות על הסולם יהיה גם כן 0, כלומר

בציר x

$$N_w - f_s = 0$$

בציר y

$$N_F - mg - N_m = 0$$

כלומר

$$N_w = f_s$$
$$N_F = (m + M)g$$

בנוסף נדרוש סך המומנטים יהיה 0. נבחר את ציר הסיבוב להיות בתחתית הסולם ואת הסיבוב נגד כיוון השעון ככיוון החיובי.

הזווית של הסולם עם הקרקע $\sin\theta = \frac{h}{L}$, $\cos\theta = \frac{\sqrt{L^2-h^2}}{L}$

מכיוון שהזרוע של כוח החיכוך והנורמל מהקרקע הם אפס, במקרה הזה הם

המומנטים:

$$\tau_W = -L\sin\theta\, N_W = -N_w h$$

$$\tau_{mg} = \frac{L}{3}\cos\theta\ \ mg$$

$$\tau_{N_m} = x\cos\theta\, N_m = x\cos\theta\ \ Mg$$

משוואת המומנטים

$$x\cos\theta\, Mg + \frac{L}{3}\cos\theta\, mg - N_w h = 0$$

ממשוואת הכוחות

$$N_w = f_s \le \mu_s N_F = \mu_s (m+M)g$$

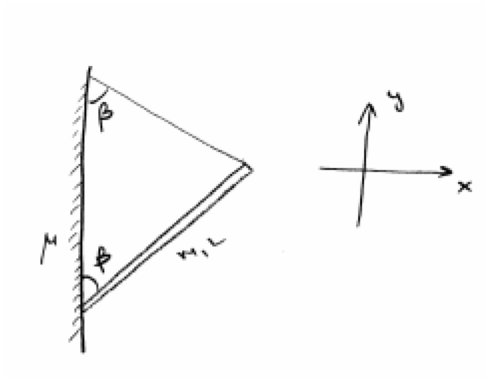
ולכן

$$x = \frac{N_w h}{Mg\cos\theta} - \frac{L}{3}\frac{m}{M} \le \frac{\mu_S (m+M)gLh}{Mg\sqrt{L^2-h^2}} - \frac{mL}{3M} = \frac{\mu_S (m+M)Lh}{M\sqrt{L^2-h^2}} - \frac{mL}{3M}$$

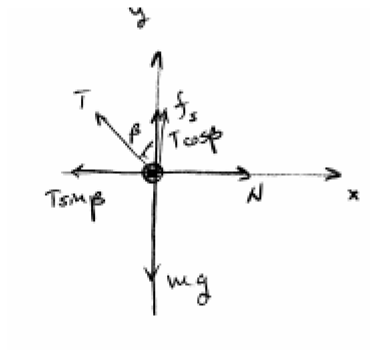
$$x \le \frac{\mu_S (m+M)Lh}{M\sqrt{L^2-h^2}} - \frac{mL}{3M} \approx 10.41\ m$$

תרגיל 3 <1_6300>

נתון מוט במסה m ואורך L, יש חיכוך עם הקיר. הזווית $\beta = 70°$



אילו כוחות פועלים על הגוף? מתיחות, נורמל מהקיר, ומשקל וחיכוך



הגוף נמצא במנוחה, לכן

ציר x

$$N - T\sin\beta = 0$$

ציר y

$$T\cos\beta + f_s - mg = 0$$

$$f_s \leq \mu N$$

נקבל

$$f_s = mg - T\cos\beta \leq \mu N = \mu T\sin\beta$$

יש לנו אי שוויון עם שני נעלים, μ ו\T ונצטרך למצוא את הקשר ביניהם באמצעות מומנטים.

על מנת להקל על החשבון, נקבע את ציר הסיבוב ציר הסיבוב בנקודה בקיר, וכך מומנט הכוח של הנורמל והחיכוך הם 0. אין צורך לחשב את מומנט האינרציה, משום שסך המומנטים הוא 0. נקבע את הכיוון החיובי נגד כיוון השעון.

המומנטים:

$$\tau_{mg} = -\frac{L}{2} mg \sin\beta$$

$$\tau_T = LT \sin 2\beta$$

סך המומנטים

$$\sum \tau = LT \sin 2\beta - \frac{L}{2} mg \sin\beta = 0$$

$$2T\cos\beta = \frac{mg}{2} \to T = \frac{mg}{4\cos\beta}$$

ולכן

$$mg - T\cos\beta = \frac{3mg}{4} \le \frac{\mu mg \sin\beta}{4\cos\beta}$$

$$\mu \ge 3\cot\beta$$