תרגול 12 – תנע ומרכז מסה

<u>תנע</u>

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$[p] = \frac{kg \cdot m}{s}$$

את החוק השני של ניוטון ניתן לכתוב

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

עבור מערכת בה סך הכוחות הוא 0 ואין כוחות חיצוניים, אנחנו נקבל

$$\sum \vec{F} = 0 = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

אם הנגזרת היא 0, כלומר שהתנע קבוע בזמן. קיבלנו את חוק שימור התנע, כלומר

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f$$

כלומר התנעים בזמנים שונים זהים במערכת הנ"ל.

אם יש כוח חיצוני (כלומר התנע לא נשמר), אזי שינוי התנע בזמן ניתן לפי הנגזרת:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}$$

<u>מתקף</u>

מתקף מוגדר כשינוי בתנע של המערכת.

$$\vec{J} = \Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$$

כלומר שאם התנע נשמר במערכת, המתקף הוא אפס.

ניתן להתייחס למערכת של כמה חלקיקים (מסות) ולהגדיר להם את התנע הכולל

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots + \vec{p}_N$$

<u>התנגשויות</u>

אם מתקיימת התנגשות בין שני חלקיקים, ונגדיר מערכת של שני החלקיקים יחד, אזי הכוחות שהחלקיקים מפעילים אחד על השני הם כוחות פנימיים, ולכן מתקיים שימור תנע.

$$\vec{p}_{i,tot} = \vec{p}_{j,tot}$$

אנחנו מחלקים את ההתנגשויות לשני סוגים:

התנגשות אלסטית – בה יש שימור אנרגיה

התנגשות אי-אלסטית – בה אין שימור אנרגיה. דוגמא לסוג כזה היא התנגשות פלסטית. (לא מתעסקים בסוגים אחרים של התנגשויות). בהתנגשות פלסטית הגופים בהתנגשות נדבקים אחד לשני ונעים יחד (עדיין יש שימור תנע).

מרכז מסה

עבור מערכת עם מספר גופים, הגדרת מיקום מרכז המסה היא

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

כאשר m_i היא מסת החלקיק הi

ו$\vec{r}_i$ הוא מיקום החלקיק הi.

שאלות מסוימות עם מספר גופים, קל יותר לפתור במערכת מרכז המסה.

מהירות מרכז המסה

$$\vec{v}_{cm} = \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i}$$

$$\vec{p}_{cm} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \sum_i \vec{p}_i$$

לפי ההגדרות שראינו לפני כן

$$\sum_i \vec{F}_i = \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{d\vec{p}_{cm}}{dt} = M\vec{a}_{cm}$$

כאשר $M = \sum_i m_i$

המשמעות היא שאם אין כוחות חיצוניים למערכת (כלומר שכל הכוחות הם פנימיים ולכן לפי החוק השלישי מבטלים אחד את השני), תאוצת מרכז המסה היא 0, כלומר מהירות מרכז המסה נשמרת.

תרגיל 1 <1_4600>

$$M_o = 16M_p$$

$$\mathrm{M_H} = 1M_p$$

$$1\dot{A} = 10^{-10}m$$

שימו לב שניתן לקבוע את מערכת הצירים כך שיהיה קל לחשב את מרכז המסה.

נקבע את מערכת הצירים כך שראשיתה תהיה במולקולה O ומולקולות המימן יהיו סימטרית סביב ציר הx

מיקום האטומים:

$$\vec{r}_O = (0,0)\dot{A}$$

$$\vec{r}_{H_1} = (\cos 53°, \sin 53°)\dot{A} \approx (0.6,0.8)\dot{A}$$

$$\vec{r}_{H_2} = (\cos 53°, -\sin 53°)\dot{A} \approx (0.6,-0.8)\dot{A}$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{3} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{3} m_i} = \frac{M_0(0,0) + M_H(0.6,-0.8) + M_H(0.6,-0.8)}{M_O + M_H + M_H} = \frac{M_p(1.2,0)\dot{A}}{18M_p} = (0.067,0)\dot{A}$$

תרגיל 2 <1_4400>

$$M_1 = 100\ kg$$

$$L = 0.5\ m$$

$$\theta_0 = 30°$$

$$M_2 = 3M_1$$

ההתנגשות היא פלסטית. יש שלושה חלקים לבעיה – לפני ההתנגשות יש שימור אנרגיה, בהתנגשות אין שימור אנרגיה ואחרי ההתנגשות שוב יש שימור אנרגיה.

א. את המהירות יהיה פשוט לחשב משיקולי אנרגיה

$$mgL(1-\cos\theta_0) = \frac{1}{2}mv_1^2 \to v_1^2 = 2gL(1-\cos\theta_0) \to v_1 = \sqrt{2gL(1-\cos\theta_0)} = 1.15\frac{m}{s}$$

ב. מכיוון שיש התנגשות פלסטית, אין שימור אנרגיה, אבל במערכת שני הגופים יש שימור תנע, כלומר

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_{12}$$

אנחנו יודעים שמהירות הכדור הגדול לפני ההתנגשות היא 0, לכן אין לו תנע לפני ההתנגשות, כלומר

$$M_1 v_1 = (M_1 + M_2)u_{12}$$

(נוהגים לסמן מהירות אחרי התנגשות באות u).

$$u_{12} = \frac{M_1 v_1}{M_1 + M_2} = \frac{1}{4}\cdot 1.15\frac{m}{s} = 0.29\frac{m}{s}$$

ג. שוב, משיקולי שימור ארגיה (שימו לב שבמהלך ההתנגשות אין שימור אנרגיה, אבל לפני ואחרי האנרגיה נשמרת)

$$\frac{1}{2}(M_1+M_2)u_{12}^2 = (M_1+M_2)gL(1-\cos\theta)$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{1}{2}\frac{u_{12}^2}{gL} = 0.99$$

$$\theta = 7.5°$$

ד. המתקף הוא ההפרש התנעים של המסה, כלומר

$$\vec{J} = \Delta\vec{p}_2$$

אנחנו עובדים בציר x, ואין שינוי בתנע בציר y כלומר

$$J_x = p_{2f,x} - p_{2i,x} = 3Mu_{12} - 3M\cdot 0 = 3Mu_{12} = 87\frac{kgm}{s}$$

כלומר

$$\vec{J} = J_x\hat{x} = 87\ kg\frac{m}{s}\ \hat{x}$$

תרגיל 3 <4403_1>

ההתנגשות היא אלסטית. כלומר שבנוסף לשימור התנע יש גם שימור אנרגיה.

א. נבחר את הציר החיובי בכיוון ימינה, כך שמשוואת שימור התנע:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2$$
$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$$

משימור אנרגיה נקבל

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}$$
$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2$$

יש לנו שתי משוואות בשני נעלמים. המהירויות נשארו כולן חיוביות, כך שהכיוון שלהן יכנס רק בהצבה (ימינה עבור פלוס ושמאלה עבור מינוס)

$$u_1 = \frac{m_2}{m_1}(v_2 - u_2) + v_1$$

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_2 u_2^2 + m_1\left(\frac{m_2}{m_1}(v_2 - u_2) + v_1\right)^2$$
$$= m_2 u_2^2 + \frac{m_2^2}{m_1}(v_2^2 + u_2^2 - 2v_2 u_2) + 2m_2 v_1(v_2 - u_2) + m_1 v_1^2$$

$$u_2^2\left(m_2 + \frac{m_2^2}{m_1}\right) - u_2\left(2\frac{m_2^2}{m_1}v_2 + 2m_2 v_1\right) + \left(\frac{m_2^2}{m_1} - m_2\right)v_2^2 + 2m_2 v_1 v_2 = 0$$

נציב בשלב הזה מספרים

$$0.75u_2^2 + u_2(-0.36 + 0.9) + 0.024 - 0.36 = 0$$

$$0.75u_2^2 - 0.54u_2 - 0.336 = 0$$

$$u_2 = \frac{0.54 \pm \sqrt{0.54^2 + 4 \cdot 0.75 \cdot 0.336}}{1.5} = \frac{0.54 \pm 1.14}{1.5} = -0.4 \ or \ 1.12\frac{m}{s}$$

הפתרון הראשון הוא הפתרון הטריוויאלי – מקרה בו לא התקיימה התנגשות וכל גוף המשיך לדרכו. לכן, אם נדרוש התנגשות, נקבל $u_2 = 1.12\frac{m}{s}$

ובהתאם

$$u_1 = \frac{3}{2}(-0.4 - 1.12) + 1.5 = -0.78\frac{m}{s}$$

ב. מהירות מרכז המסה לפני ההתנגשות

$$\vec{v}_{cm} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 0.36\frac{m}{s}$$

אחרי ההתנגשות

$$\vec{v}_{cm} = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2} = 0.36\frac{m}{s}$$

מכיוון שיש שימור תנע בהתנגשות, התוצאה הזו היא טריוויאלית.

תרגיל 4 <4307_1>

זוהי שאלה שממחישה את היתרון בשימוש במרכז המסה. נבצע חשבון של מיקום הפגיעה של מרכז המסה בקרקע באמצעות קינמטיקה, ובאמצעות הגדרת מיקום מרכז המסה, נוכל למצוא את מקום הפגיעה של המסה השנייה.

בציר x אין כוחות חיצוניים, ולכן התנע של מרכז המסה נשמר

$$x_{cm} = v_0 \cos\alpha\, t$$

בציר y קיים כוח הכובד ולכן יש תאוצה קבועה של מרכז המסה

$$y_{cm} = v_0 \sin\alpha\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

זמן הפגיעה ברצפה נקבע לפי ציר y

$$y_{cm} = 0 \rightarrow t_1 = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g}$$

מיקום מרכז המסה בזמן הפגיעה בציר x

$$x_{cm}(t_1) = \frac{2 v_0^2}{g} \sin\alpha \cos\alpha$$

בנוסף אנחנו יודעים לפי הגדרה שמרכז המסה

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

לכן

$$x_{cm}(t_1) = \frac{m_1 d_1 + m_2 d_2}{m_1 + m_2}$$

נבודד את d_2

$$d_2(t_1) = \frac{m_1 + m_2}{m_2}\, x_{cm}(t_1) - \frac{m_1}{m_2} d_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_2} \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha - \frac{m_1}{m_2} d_1$$